QA
36
.E56
v.2C
pt.5

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN, GÖTTINGEN, HEIDELBERG, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SECHS BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . .	H. BURKHARDT† (1896–1914), W. WIRTINGER (1905–1912) IN WIEN, R. FRICKE IN BRAUNSCHWEIG UND E. HILB IN WÜRZBURG.
— III: GEOMETRIE, IN 4 TEILEN . .	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND H. MOHRMANN IN BASEL.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN.	F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODASIE UND GEOPHYSIK	PH. FURTWÄNGLER IN WIEN UND E. WIECHERT (1899–1905) IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE	K. SCHWARZSCHILD† (1904–1916) UND S. OPPENHEIM IN WIEN.

BAND II 3 HEFT 5.

K. HENSEL IN MARBURG A. L., II C 5: ARITHMETISCHE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN . . . . . S. 533
H. W. E. JUNG IN HALLE A. S., II C 6: ARITHMETISCHE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN ZWEIER UNABHÄNGIGEN VERÄNDERLICHEN . . . . . S. 651

AUSGEGEBEN AM 15. JUNI 1921.

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1921.

Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II 1 (vollständig); Bd. II 2 (vollständig); Bd. II 3 Heft 1–5; Bd. III 1, Heft 1–7; Bd. III 2, Heft 1–7; Bd. III 3, Heft 1–5; Bd. IV 11 (vollständig); Bd. IV 1 II, Heft 1–3; Bd. IV 21 (vollständig); Bd. IV 2 II (vollständig); Bd. V 1, Heft 1–6; Bd. V 2, Heft 1–3; Bd. V 3, Heft 1–3; Bd. VI 1 A, Heft 1–3; Bd. VI 1 B, Heft 1–4; Bd. VI 2, Heft 1–7.

Jeder Band ist einzeln käuflich, dagegen werden einzelne Hefte nicht abgegeben. Der Bezug der ersten Lieferung eines Bandes verpflichtet zu seiner vollständigen Abnahme.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck - München, O. Hölder - Leipzig, F. Klein - Göttingen, A. Krazer - Karlsruhe, V. v. Lang - Wien, M. Planck - Berlin, H. v. Seeliger - München, W. Wirtinger - Wien

steht der Redaktion, die aus den Herren

R. Fricke - Braunschweig, Ph. Furtwängler - Wien, E. Hilb - Würzburg, F. Klein - Göttingen, W. Fr. Meyer - Königsberg, H. Mohrmann - Basel, C. H. Müller - Hannover, S. Oppenheim - Wien, A. Sommerfeld - München und H. E. Timerding - Braunschweig

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens - Rostock
P. Bachmann (†)
J. Bauschinger - Leipzig
G. Bohlmann - Berlin
L. v. Bortkewitsch - Berlin
H. Burkhardt (†)
E. Czuber - Wien
W. v. Dyck - München
D. Hilbert - Göttingen
O. Hölder - Leipzig
G. Landsberg (†)
R. Mehmke - Stuttgart
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.
E. Netto (†)
V. Pareto - Lausanne
A. Pringsheim - München
C. Runge - Göttingen [a. M.
A. Schoenflies - Frankfurt
H. Schubert (†)
D. Seliwanoff - St. Petersburg
E. Study - Bonn
K. Th. Vahlen - Greifswald
H. Weber (†)
A. Wiman - Upsala

II. Band: [a. M

L. Bieberbach - Frankfurt
M. Böcher (†)
H. A. Bohr - Kopenhagen
E. Borel - Paris
G. Brunel (†)
H. Burkhardt (†)
H. Cramér - Mörby
G. Faber - München
R. Fricke - Braunschweig
H. Hahn - Bonn
J. Harkness - Montreal
E. Hellinger - Frankfurt a. M.
K. Hensel - Marburg
E. Hilb - Würzburg
H. W. E. Jung - Halle
A. Kneser - Breslau
A. Krazer - Karlsruhe
L. Lichtenstein - Berlin
L. Maurer - Tübingen
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.
N. E. Nörlund - Kopenhagen
W. F. Osgood - Cambridge, P. Painlevé - Paris [Mass.
S. Pincherle - Bologna
A. Pringsheim - München
M. Riesz - Stockholm
A. Rosenthal - München
C. Runge - Göttingen
A. Sommerfeld - München
O. Szász - Frankfurt a. M.
O. Toeplitz - Kiel
E. Vessiot - Lyon
A. Voss - München
A. Wangerin - Halle
E. v. Weber - Würzburg
Fr. A. Willers - Charlottenburg
W. Wirtinger - Wien
E. Zermelo - Zürich

III. Band:

H. Beck - Bonn
G. Berkhan (†)
L. Berwald - Prag
L. Berzolari - Pavia
G. Castelnuovo - Rom
M. Dehn - Breslau
F. Dingeldey - Darmstadt
F. Enriques - Bologna
G. Fano - Turin
P. Heegaard - Kopenhagen
P. Hjelmslev - Kopenhagen
G. Kohn - Wien
G. Kowalewski - Dresden
H. Liebmann - Heidelberg
R. v. Lilienthal - Münster i. W.
G. Loria - Genua
K. Lotze - Stuttgart
H. v. Mangoldt - Danzig
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.
H. Mohrmann - Basel
E. Müller - Wien
E. Papperitz - Freiberg i. S.
Th. Pöschl - Prag
K. Rohn (†)
H. Rothe - Wien
E. Salkowski - Hannover
G. Scheffers - Charlottenburg
A. Schoenflies - Frankfurt
C. Segre - Turin [a. M.
J. Sommer - Danzig
P. Stäckel (†)
O. Staude - Rostock
E. Steinitz - Kiel
H. Tietze - Erlangen
A. Voss - München
R. Weitzenboeck - Graz
M. Zacharias - Berlin
H. G. Zeuthen - Kopenhagen
K. Zindler - Innsbruck

IV. Band:

M. Abraham - Stuttgart
P. Cranz - Berlin
C. u. T. Ehrenfest - Leiden
S. Finsterwalder - München
O. Fischer (†)
L. Föppl - Dresden
Ph. Forchheimer - Graz
Ph. Furtwängler - Wien
M. Grübler - Dresden
M. Grüning - Hannover
E. Hellinger - Frankfurt a. M.
L. Henneberg - Darmstadt
K. Heun - Karlsruhe
G. Jung - Mailand
Th. v. Kármán - Aachen
F. Klein - Göttingen
A. Kriloff - Petersburg
H. Lamb - Manchester
A. E. H. Love - Oxford
R. v. Mises - Berlin
C. H. Müller - Hannover
L. Prandtl - Göttingen
G. Prange - Hannover
H. Reißner - Charlottenburg
A. Schoenflies - Frankfurt
P. Stäckel (†) [a. M.
O. Tedone - Genua
H. E. Timerding - Braunschwg.
A. Timpe - Berlin
A. Voss - München
G. T. Walker - Simla (Indien)
K. Wieghardt - Wien
G. Zemplén (†)

V. Band:

M. Abraham - Stuttgart
L. Boltzmann (†)
M. Born - Frankfurt a. M.
G. H. Bryan - Bangor (Wales)
P. Debye - Zürich
P. S. Epstein - München
S. Finsterwalder - München
R. Gans - La Plata
K. Herzfeld - München
F. W. Hinrichsen (†)
E. W. Hobson - Cambridge
H. Kamerlingh-Onnes - Leiden
W. H. Keesom - Leiden
M. v. Laue - Berlin
W. Lenz - München
Th. Liebisch - Berlin
H. A. Lorentz - Haarlem
L. Mamlock - Berlin
G. Mie - Halle
H. Minkowski (†)
O. Mügge - Göttingen
J. Nabl - Wien
W. Pauli - München - Wien
F. Pockels (†)
L. Prandtl - Göttingen
R. Reiff (†)
C. Runge - Göttingen [a. M.
A. Schoenflies - Frankfurt
M. Schröter - München
R. Seeliger - Greifswald
A. Sommerfeld - München
E. Study - Bonn
A. Wangerin - Halle
W. Wien - Würzburg
J. Zenneck - München

VI, 1. Band:

R. Bourgeois - Paris
G. H. Darwin (†)
F. Exner - Wien
S. Finsterwalder - München
Ph. Furtwängler - Wien
F. R. Helmert (†)
S. Hough - Kapstadt
H. Meldau - Bremen
W. Moebius - Leipzig
P. Pizzetti - Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt - Potsdam
E. v. Schweidler - Innsbruck
W. Trabert - Wien
E. Wiechert - Göttingen

VI, 2. Band:

E. Anding - Gotha
J. Bauschinger - Leipzig
A. Bemporad - Catania
A. Brill - Frankfurt a. M.
E. W. Brown - New-Haven
A. v. Brunn - Danzig
C. Ed. Caspari - Paris
F. Cohn - Berlin
R. Emden - München
F. K. Ginzel - Berlin
P. Guthnick - Berlin
J. v. Hepperger - Wien
G. Herglotz - Leipzig
J. Holetschek - Wien
H. Kobold - Kiel
Th. Kottler - Wien
K. Laves - Chicago
J. Lense - Wien
G. v. Niessl - Wien
S. Oppenheim - Wien
K. Schwarzschild (†)
K. Sundman - Helsingfors
E. T. Whittaker - Edinburgh
A. Wilkens - Breslau
C. W. Wirtz - Kiel
H. v. Zeipel - Upsala

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a/S., Wettiner Straße 17, zu richten, der sich mit den betr. Bandredakteuren wegen der Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON NORDAMERIKA:
COPYRIGHT 1921 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

II C 5. ARITHMETISCHE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN.

Von

K. HENSEL*)

in Marburg a. L.

Inhaltsübersicht.

I. Der Körper $K(z)$ der rationalen Funktionen von z.

1. Untersuchung der rationalen Funktionen von z für eine Stelle dieser Variablen.
2. Der Körper $\overline{K}(\mathfrak{p})$ aller zur Stelle $\mathfrak{p}$ gehörigen Potenzreihen und der Unterkörper $K(\mathfrak{p})$ der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen konvergenten Potenzreihen.
3. Untersuchung der rationalen Funktionen von z für alle Stellen der ganzen Kugelfläche. Die rationalen Divisoren.

II. Der Körper $K(u, z)$ der algebraischen Funktionen einer Variablen.

4. Allgemeine Sätze über die algebraischen Funktionen.
5. Untersuchung der Funktionen des Körpers $K(u, z)$ in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{p}$ der unabhängigen Variablen.
6. Die Grundgleichung ist für den Bereich $\overline{K}(\mathfrak{p})$ irreduktibel.
7. Allgemeiner Fall: Die Grundgleichung zerfällt innerhalb $\overline{K}(\mathfrak{p})$ in mehrere irreduktible Faktoren.
8. Die dem Körper $K(u, z)$ zugeordnete *Riemann*sche Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$.
9. Direkte Berechnung der zu einer Stelle $\mathfrak{p}$ gehörigen Wurzelzyklen. Das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Diagramm.
10. Untersuchung der algebraischen Funktionen des Körpers für alle Stellen der *Riemann*schen Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$. Die algebraischen Divisoren.
10a. Die arithmetischen Begründungen des Punktbegriffes.
11. Untersuchung der Funktionen des Körpers $K(u, z)$ in bezug auf ihre Teilbarkeit durch einen beliebigen Divisor.
12. Die algebraischen Systeme und ihre Elementarteiler.
13. Die eindeutigen Transformationen des Körpers $K(u, z)$ in den ihm gleichen $K(y, x)$ bei beliebiger Annahme der unabhängigen Variablen x.
14. Die Einteilung der algebraischen Divisoren in Klassen.
15. Die Divisorenscharen und ihre Invarianten.
16. Die ganzen Divisoren einer Klasse Q.

III. Die zu dem Körper $K(y, x)$ gehörigen Abelschen Integrale.

17. Die *Abel*schen Integrale.
18. Die Differentiale der Elemente des Körpers K und die zugehörigen Divisoren.
19. Die Differentialklasse W.

*) Die mit [O] bezeichneten Anmerkungen sowie die gleichbezeichnete Nr. **10a** rühren von Herrn *A. Ostrowski* her.

20. Die Fundamentalaufgabe in der Theorie der *Abel*schen Integrale. Der *Riemann-Roch*sche Satz.
21. Die Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung.
22. Spezialisierung für die Integrale mit rationalem Integranden.

IV. Die zum Körper $K(y, x)$ gehörigen algebraischen Kurven.

23. Die ebenen algebraischen Kurven und ihre singulären Punkte.
24. Der zur Kurve $\mathfrak{C}$ gehörige Divisor der Doppelpunkte.
25. Auflösung der Singularitäten einer Kurve.
26. Die zu einer Gleichung $F(x, y)$ gehörigen Funktionenringe.
27. Darstellung der zum Körper K gehörigen Kurven durch homogene Koordinaten.
28. Die Differentialteiler einer Divisorenschar und ihre Anwendung in der Geometrie. Die *Plücker*schen Formeln.
29. Theorie der algebraischen Raumkurven.

V. Die Klassen algebraischer Gebilde.

30. Die Hauptkurve eines Körpers und ihre *Weierstraß*punkte.
31. Die Normalgleichungen und die Moduln der algebraischen Körper.
32. Die Normalgleichungen und die Moduln der allgemeinen Körper vom Geschlecht p.

VI. Algebraische Relationen zwischen Abelschen Integralen.

33. Algebraische Normierung der Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung.
34. Die Integrale dritter Gattung und der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument.
35. Einteilung aller Wege auf einer *Riemann*schen Fläche in Klassen.
36. Die Fundamentalsysteme von Periodenwegen für eine *Riemann*sche Fläche.
37. Die Periodenrelationen der Integrale erster und zweiter Gattung.
38. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Fundamentalsystemen von Periodenwegen.
39. Die Perioden der Integrale zweiter und dritter Gattung als Funktionen ihrer Unstetigkeitspunkte.
40. Die Primfunktionen. Zerlegung der Funktionen des Körpers in Primfunktionen.
41. Das *Abel*sche Theorem als Additionsprinzip der Integrale.
42. Die aus dem *Abel*schen Theorem folgenden Reduktionsprobleme.
43. Das Umkehrproblem für die *Abel*schen Integrale.

VII. (Anhang.) Arithmetische Theorie der algebraischen Zahlen.

44. Der Körper $K(1)$ der rationalen Zahlen und der Körper $K(p)$ der p-adischen Zahlen.
45. Die algebraischen Zahlkörper und die ihnen isomorphen rationalen Kongruenzkörper.
46. Untersuchung der rationalen Kongruenzkörper für den Bereich einer Primzahl p. Ihre Reduktion auf die p-adischen Kongruenzkörper.
47. Die p-adischen Kongruenzkörper und die ihnen isomorphen Körper $K(\mathfrak{P})$ der π-adischen algebraischen Zahlen.
48. Der zu einer vorgelegten Gleichung $F(x) = 0$ zugehörige *Galois*sche π-adische Zahlkörper $K(\mathfrak{P})$.

Literatur.

(Die hier angeführten Abhandlungen und Werke werden im Text und in den Anmerkungen nur mit der Angabe der Abkürzung und der Seitenzahl zitiert.)

R. Dedekind und *H. Weber,* Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, J. f. Math. 92 (1882), p. 181—290 („*D.-W.*").

H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. III, 5. Buch, p. 623—707. Braunschweig 1908, F. Vieweg & Sohn („*W.*").

Bringt sämtliche Resultate von *D.-W.* mit vereinfachter Begründung der Idealtheorie. Wird nur im Abschnitt (**10a**) über die Grundlegung des Punktbegriffes zitiert.

L. Kronecker, Über die Discriminante algebraischer Funktionen einer Variabeln, J. f. Math. 91 (1881), p. 301—334 („Discr.").

L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift zu Herrn Ernst Eduard Kummers fünfzigjährigem Doktorjubiläum. Berlin 1882, G. Reimer. Auch J. f. Math. 92 (1882), p. 1—122 („Festschrift").

A. Brill und *M. Nöther,* Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 3 (1894), p. 109—566 und p. I—XXIII Vorrede („*B.-N.*").

Geht auf die arithmetische Theorie zwar nicht ein, bespricht jedoch eingehend die *Kronecker*schen Untersuchungen über die Diskriminante. Bringt außerdem einen Bericht über die *Weierstraß*sche Vorlesung aus dem Jahre 1869 (als „V. 1869" zitiert), in der der Begriff der *ganzen* algebraischen Funktion stark benutzt wird, und den zeitlich ersten, zusammenhängenden (wenn auch äußerst knapp gehaltenen) Bericht über die spätere *Weierstraß*sche Theorie (1873) als „V. 1873" zitiert, die auf *B.* und *H.-L.* von Einfluß gewesen ist.

*H. F. Baker, Abel*s theorem and the allied theory including the theory of the theta funktion. Cambridge 1897 („*B.*").

K. Hensel und *G. Landsberg,* Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und *Abel*sche Integrale. Leipzig 1902, Teubner („*H.-L.*").

Der Inhalt der ersten Vorlesungen ist auch besonders erschienen: *K. Hensel,* Zur Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der *Abel*schen Integrale, Math. Ann. 54 (1901), p. 437—497. Dieser Aufsatz wird nicht besonders zitiert werden.

C. Weierstraß, Vorlesungen über die Theorie der *Abel*schen Transcendenten, Gesammelte mathematische Werke, Bd. IV (1902).

Wird zum Vergleich mit den Methoden und Resultaten der arithmetischen Theorie herangezogen.

E. Noether, Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien und zu der Zahlkörpertheorie, Deutsch. Math.-Ver. 28 (1914), p. 182—203 („*E. N.*").

Gibt eine kurze Darstellung der Grundlagen der verschiedenen Theorien und eine Vergleichung der verschiedenen arithmetischen Theorien untereinander und mit der geometrischen Theorie der algebraischen Funktionen.

K. Hensel, Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 118—131. Vgl. Anm. 5) dieses Artikels.

—, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1908 (*H.* I).

K. Hensel, Zahlentheorie, Berlin 1913 (*H.* II).
—, Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen, Math. Ztschr. 2 (1918), p. 433 bis 452 (*H.* III).

In diesen Werken ist die im Anhange erwähnte Theorie der rationalen und algebraischen Zahlen ausführlich dargestellt.

Es werden hauptsächlich nur die Abhandlungen zitiert, welche die Methoden der arithmetischen Theorie benutzen. Für die übrige Literatur, die sich auf die im Referat berührten Fragen bezieht, vgl. *B.-N.*, II B 2 (*Wirtinger*), III C 4 (*Berzolari*), III C 8 (*Rohn*), III C 9 (*Segre*), III C 10 (*Zindler*) [*O*].

I. Der Körper $K(z)$ der rationalen Funktionen von z.

1. Untersuchung der rationalen Funktionen von z für eine Stelle dieser Variablen. Die Gesamtheit aller rationalen Funktionen

$$Z = \varphi(z)$$

einer komplexen Variablen mit beliebigen reellen oder komplexen Koeffizienten bildet einen *Körper*[1]), dessen Elemente sich durch die elementaren Rechenoperationen wieder e rzeugen.

Jedem Werte $z = \alpha$ bzw. $z = \infty$ der unabhängigen Variabeln ordnen wir eindeutig eine *Stelle* zu.[2]) Geometrisch entspricht jeder endlichen Stelle $\alpha = a + ib$ ein Punkt der komplexen Zahlenebene oder durch stereographische Abbildung derselben ein Punkt $\mathfrak{p}$ der sog. Einheitskugel $\mathfrak{K}$ vom Durchmesser eins; der Stelle $z = \infty$ entspricht der Südpol $\mathfrak{p}_\infty$ dieser Kugel. Die geometrische Repräsentation dient

1) Die erste Körperdefinition bei *Dedekind* (Zahlkörper), (*Lejeune-Dirichlet*, Vorles. über Zahlentheorie, 2. Aufl., Braunschweig (1871), für Funktionenkörper *Kronecker* (Rationalitäts- und Gattungsbereiche), Festschrift, p. 6. Andere wesentlich allgemeinere Körperdefinitionen geben *D.-W.*, p. 185, *Weber,* Math. Ann. 43 (1893), p. 526—527, *Steinitz,* J. f. Math. 137 (1910), p. 172.

Es sind eigentlich zwei verschiedene Körperbegriffe, mit denen die Theorie der algebraischen Funktionen *einer* Veränderlichen operiert. Einmal sind es Körper der algebraischen Funktionen einer bestimmten festen Veränderlichen z (*Kronecker*) — solchen Körpern entsprechen dann n-blättrige über der z-Ebene oder der z-Kugel ausgebreitete *Riemann*sche Flächen. Oder es wird kein Element des Körpers ausgezeichnet, so daß nur zwischen konstanten und nicht konstanten Elementen zu unterscheiden ist, und der Körper wird durch die rationalen Relationen (mit beliebigen konstanten Koeffizienten) bestimmt, die zwischen seinen Elementen bestehen (*D.-W., H.-L., Steinitz*). Genauer, ein Körper algebraischer Funktionen einer Variabeln ist gegeben, wenn zu jedem Paar nicht konstanter Elemente aus ihm ein irreduzibles Polynom von zwei Veränderlichen gegeben ist, das verschwindet, sobald für die Veränderlichen jene Elemente eingesetzt werden. Diesem letzten implizite bereits bei *D.-W.* vorkommenden Körperbegriff entspricht der Begriff der absoluten *Riemann*schen Fläche, für den sich bei *D.-W.* eine arithmetische Definition findet (s. **10a**). [*O*]

2) II B 1 (*Osgood*), Nr. 8. [*O*]

hier wie im Folgenden nur zur einfachen Veranschaulichung; die folgenden Untersuchungen und Beweise sind von ihr unabhängig. Die dem Werte $z = \alpha$ bzw. $z = \infty$ zugeordnete Stelle soll im Folgenden ebenso wie der zugehörige Punkt der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}_\infty$ bezeichnet werden.

Jede Funktion Z des Körpers $K(z)$ besitzt in einer beliebigen Stelle $\mathfrak{p}$ $(z = \alpha)$ einen eindeutig bestimmten Zahlenwert $Z(\mathfrak{p})$, welcher $0, \infty, c$ sein kann; hier wie im Folgenden bedeutet c einen bestimmten endlichen von Null verschiedenen Wert. Im ersten bzw. im zweiten Falle heißt $\mathfrak{p}$ eine *Nullstelle* bzw. ein *Pol*; ist dagegen $Z(\mathfrak{p}) = c$, so heißt Z eine *Einheit* oder eine *Einheitsfunktion für die Stelle* $\mathfrak{p}$ und wird kurz durch $E(\mathfrak{p})$ oder $E(z \mid \alpha)$ bzw. $E(\mathfrak{p}_\infty)$ oder $E(z \mid \infty)$ bezeichnet.

Z heißt eine *ganze Funktion für die Stelle* $\mathfrak{p}$, wenn $Z(\mathfrak{p})$ endlich ist, ist $Z(\mathfrak{p}) = \infty$, ist also $\mathfrak{p}$ ein Pol für Z, so nennt man sie eine *für* $\mathfrak{p}$ *gebrochene Funktion.*[3]) Die Summe, die Differenz und das Produkt von ganzen Funktionen ist wieder ganz. Eine ganze oder gebrochene Funktion Z heißt durch eine andere U *für die Stelle* $\mathfrak{p}$ *teilbar*, wenn der Quotient $\frac{Z}{U}$ dort ganz ist. Die Einheitsfunktionen, und sie allein, sind in *jeder* ganzen Funktion enthalten. Ist sowohl Z durch U als auch U durch Z für $\mathfrak{p}$ teilbar, so heißen Z und U für $\mathfrak{p}$ *äquivalent*, und dies ist stets und nur dann der Fall, wenn sie sich um eine Einheitsfunktion multiplikativ unterscheiden.

Eine ganze Funktion $p(z)$ heißt eine *Primfunktion* für die Stelle $\mathfrak{p}$, wenn sie dort eine Nullstelle hat und nicht in ein Produkt von Faktoren derselben Art zerlegt werden kann. Eine solche Primfunktion ist z. B.

$$p = z - \alpha \text{ für die endliche Stelle } (z = \alpha)$$

$$p = \frac{1}{z} \qquad \text{für die unendlich ferne Stelle } (z = \infty).$$

Alle Primfunktionen für eine und dieselbe Stelle sind einander äquivalent.

Ist p eine Primfunktion, so läßt sich jede andere Funktion Z auf eine einzige Weise in der Form

$$Z = \varepsilon p^\varrho \tag{1}$$

darstellen, wo ϱ eine ganze Zahl, und ε eine Einheit bedeutet. Der Exponent ϱ, welcher offenbar von der Wahl der Primfunktion un-

3) Ganz analog nennt man in der Zahlentheorie einen reduzierten Bruch $\frac{a}{b}$ *ganz* in bezug auf eine Primzahl p, wenn b mit p teilerfremd ist, *gebrochen* in bezug auf p, wenn b durch p teilbar ist. Ebenso heißt eine Zahl a durch eine andere b teilbar in bezug auf p, wenn $\frac{a}{b}$ ganz in bezug auf p ist. Vgl. Nr. 44 dieses Referates. [O]

abhängig ist, soll die *Ordnungszahl von Z für die Stelle* $\mathfrak{p}$ heißen. Es besteht also für jede Funktion Z und für jede endliche oder die unendlich ferne Stelle eine Gleichung:

$$(1\,a) \qquad Z = (z-\alpha)^{\varrho} E(z \mid \alpha), \text{ bzw. } Z = \left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho} E(z \mid \infty).$$

Die allgemeinste Primfunktion für die betr. Stelle ergibt sich aus diesen Gleichungen für $\varrho = 1$. Die Ordnungszahl von Null ist gleich $+\infty$ zu setzen. Die Stelle $\mathfrak{p}$ ist eine Nullstelle oder ein Pol für Z, je nachdem ϱ positiv oder negativ ist.

Man ordnet nun jeder Stelle $\mathfrak{p}$ einen *Divisor* zu, welcher ebenfalls durch $\mathfrak{p}$ bezeichnet werde, und zwar soll die Teilbarkeit einer Funktion Z durch $\mathfrak{p}$ durch die folgende Definition charakterisiert werden.

Eine Funktion Z ist durch $\mathfrak{p}^{\varrho}$ teilbar, wenn sie im zugehörigen Punkte $\mathfrak{p}$ mindestens die Ordnungszahl ϱ besitzt, wenn sie also für jene Stelle mindestens durch die ϱ^{te} Potenz der zugehörigen Primfunktion teilbar ist. Z heißt *genau* durch $\mathfrak{p}^{\varrho}$ teilbar, wenn sie in $\mathfrak{p}$ genau die Ordnungszahl ϱ hat.

Sind Z und Z' genau durch $\mathfrak{p}^{\varrho}$ und $\mathfrak{p}^{\varrho'}$ teilbar, so ist ZZ' und $\frac{Z}{Z'}$ genau durch $\mathfrak{p}^{\varrho+\varrho'}$ und $\mathfrak{p}^{\varrho-\varrho'}$ teilbar.

Man nennt die so definierten Divisoren *Primteiler*, weil ein Produkt ZZ' dann und nur dann durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, wenn mindestens einer der Faktoren $\mathfrak{p}$ enthält.

Zwei Funktionen Z und Z' heißen modulo $\mathfrak{p}^{\varrho}$ *kongruent*, wenn ihre Differenz mindestens durch $\mathfrak{p}^{\varrho}$ teilbar ist. Zwei solche Funktionen heißen für den Bereich von $\mathfrak{p}$ *gleich*, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ kongruent sind; zwei rationale Funktionen sind dann und nur dann für den Bereich von $\mathfrak{p}$ gleich, wenn sie identisch sind.

Jede Funktion Z des Körpers $K(z)$ ist für den Bereich einer beliebigen Stelle $\mathfrak{p}$ gleich einer eindeutig bestimmten Potenzreihe

$$Z = A_{\varrho}\mathfrak{p}^{\varrho} + A_{\varrho+1}\mathfrak{p}^{\varrho+1} + \cdots \qquad (\mathfrak{p})$$

mit konstanten Koeffizienten $A_{\varkappa}$, welche beliebig weit rational berechnet werden können; der Exponent ϱ des Anfangsgliedes ist gleich der Ordnungszahl von Z. Für eine endliche bzw. für die unendlich ferne Stelle gelten so Entwicklungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} Z &= A_{\varrho}(z-\alpha)^{\varrho} + A_{\varrho+1}(z-\alpha)^{\varrho+1} + \cdots \qquad (\mathfrak{p}) \\ Z &= B_{\sigma}\left(\frac{1}{z}\right)^{\sigma} + B_{\sigma+1}\left(\frac{1}{z}\right)^{\sigma+1} + \cdots \qquad (\mathfrak{p}_{\infty}) \end{aligned}$$

Die Reihen (2) sind aber nicht bloß für den Bereich der Stelle $\mathfrak{p}$ gleich Z, sondern sie stellen, wie nun leicht bewiesen werden kann[3a]),

3a) Vgl. z. B. *H.-L.*, p. 8—10.

die Werte von Z *auch der Größe nach* mit jeder vorgegebenen Genauigkeit für alle Werte von z innerhalb eines Kreises auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{p}$ dar, dessen Peripherie durch den nächsten Pol von Z geht. Man nennt diese Reihen *die zur Stelle* $\mathfrak{p}$ *gehörigen Funktionenelemente von* Z. Eine allgemeine analytische Funktion, welche in einer endlichen Umgebung eines Punktes $\mathfrak{p}$ gleich einer Potenzreihe (2) ist, besitzt, wie man sagt, an dieser Stelle *rationalen Charakter*. Die rationalen Funktionen sind also analytische Funktionen, welche an einer jeden Stelle rationalen Charakter besitzen; umgekehrt folgt aus den Elementen der Funktionentheorie, daß jede solche analytische Funktion dem Körper $K(z)$ angehört.

2. Der Körper $\overline{K}(\mathfrak{p})$ aller zur Stelle $\mathfrak{p}$ gehörigen Potenzreihen und der Unterkörper $K(\mathfrak{p})$ der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen konvergenten Potenzreihen. Wir betrachten die Gesamtheit *aller* Potenzreihen für die Stelle $\mathfrak{p}$:

$$Z = a_\varrho (z-\alpha)^\varrho + a_{\varrho+1}(z-\alpha)^{\varrho+1} + \cdots \tag{3}$$

bzw.

$$Z = a_\varrho \left(\frac{1}{z}\right)^\varrho + a_{\varrho+1}\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho+1} + \cdots \tag{3'}$$

Wenn man den Begriff der Gleichheit für den Bereich von $\mathfrak{p}$ wie oben und die Addition und Multiplikation von zwei solchen Reihen wie gewöhnlich definiert, so bilden auch sie einen Körper $\overline{K}(\mathfrak{p})$, von dem der Körper der rationalen Funktionen ein Teilkörper ist; denn eine Reihe (3) oder (3′) stellt dann und nur dann eine *rationale* Funktion dar, wenn ihre Koeffizienten $a_\varrho, a_{\varrho+1}, \ldots$ einer Rekursionsformel genügen. Auch für diesen größeren Körper $\overline{K}(\mathfrak{p})$ gelten genau die einfachen Gesetze, welche vorher für den Körper $K(z)$ der rationalen Funktionen für diese Stelle ausgesprochen wurden. Auch für ihn ist $p = z - \alpha$ bzw. $\frac{1}{z}$ eine Primfunktion, und jede andere Funktion des Körpers $K(\mathfrak{p})$ läßt sich in der Form (3) bzw. (3′) eindeutig darstellen.

Einen Teilkörper von $\overline{K}(\mathfrak{p})$ bildet nun der Bereich $K(\mathfrak{p})$ aller derjenigen Potenzreihen (3) bzw. (3′), welche einen *endlichen Konvergenzbereich* besitzen, also der Bereich aller zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Funktionenelemente, welche dort rationalen Charakter haben, derselbe werde kurz *der Körper der Potenzreihen in* $\mathfrak{p}$ genannt. Der letzte Absatz des vorigen Paragraphen zeigt, daß die rationalen Funktionen nicht bloß dem Körper $\overline{K}(\mathfrak{p})$, sondern auch seinem Unterkörper $K(\mathfrak{p})$ angehören.

3. Untersuchung der rationalen Funktionen von z für alle Stellen der ganzen Kugelfläche. Die rationalen Divisoren. Die Einführung der den einzelnen Punkten $\mathfrak{p}$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ zugeordneten

Primteiler leitet naturgemäß über zu der Betrachtung der allgemeinen aus ihnen zusammengesetzten Divisoren. Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ r beliebige Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ und zugleich auch die ihnen zugeordneten Primteiler; sind ferner $h_1, h_2, \ldots, h_r$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen, oder auch Null, so sagen wir:

Eine Funktion Z des Körpers $K(z)$ ist für den Bereich der Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ durch den Divisor

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{h_1}\mathfrak{p}_2^{h_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{h_r}$$

teilbar, wenn sie allgemein im Punkte $\mathfrak{p}_i$ mindestens die Ordnungszahl h_i besitzt, wenn also Z für jede dieser Stellen $\mathfrak{p}_i$ mindestens durch die h_i^{te} Potenz der zugehörigen Primfunktion $\mathfrak{p}_i$ teilbar ist. Z ist ein *ganzes Vielfaches* oder ein *Multiplum* von $\mathfrak{q}$, wenn sich Z außerdem noch auf der ganzen Fläche $\mathfrak{K}$ mit Einschluß von $\mathfrak{p}_\infty$, falls dieser Primteiler nicht in $\mathfrak{q}$ vorkommt, regulär verhält, also sonst keine Pole besitzt. $\mathfrak{q}$ heißt ein *ganzer* oder ein *gebrochener Divisor*, je nachdem keiner oder wenigstens einer seiner Exponenten negativ ist.

Die Summe $q = h_1 + h_2 + \cdots + h_r$ der Exponenten von $\mathfrak{q}$ heißt die *Ordnung* jenes Divisors. Sind

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{h_1}\mathfrak{p}_2^{h_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{h_r}, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{p}_1^{k_1}\mathfrak{p}_2^{k_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{k_r}$$

zwei beliebige Divisoren (in denen auch einige Exponenten Null sein können), so nennt man

$$\mathfrak{p}_1^{h_1+k_1}\mathfrak{p}_2^{h_2+k_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{h_r+k_r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1^{h_1-k_1}\mathfrak{p}_2^{h_2-k_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{h_r-k_r}$$

bzw. das *Produkt* und den *Quotienten* von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ und bezeichnet sie durch $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ und $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}$. Sind q und r die Ordnungszahlen von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$, so sind die entsprechenden Zahlen für $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ und $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}$ bzw. $q+r$ und $q-r$. Dann kann man alle Regeln und Definitionen der Arithmetik auf die Multiplikation uud die Division dieser Divisoren ausdehnen. Jeder Divisor $\mathfrak{q}$ läßt sich als Quotient $\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}}$ zweier ganzen Divisoren darstellen, welche der *Zähler* und der *Nenner von* $\mathfrak{q}$ heißen, und diese Darstellung heißt *reduziert* oder *nicht reduziert*, je nachdem $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{n}$ gewisse Primteiler gemeinsam enthalten oder nicht. Ebenso ergibt sich der Begriff des *größten gemeinsamen Teilers* $\mathfrak{d} = (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\mu)$ mehrerer ganzer oder gebrochener Divisoren genau wie in der reinen Arithmetik.

Zu jeder rationalen Funktion Z gehört ein Divisor

$$\mathfrak{q}_Z = \frac{\mathfrak{z}_Z}{\mathfrak{n}_Z} = \mathfrak{p}_1^{h_1}\mathfrak{p}_2^{h_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{h_r},$$

dessen Zähler in der reduzierten Form durch die Nullstellen, dessen

Nenner durch die Pole von Z eindeutig bestimmt ist. So ist z. B. für jeden Linearfaktor $z - \alpha$ bzw. $\frac{1}{z}$

$$z - \alpha = \frac{\mathfrak{p}_\alpha}{\mathfrak{p}_\infty}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\mathfrak{p}_\infty}{\mathfrak{p}_0}.$$

Da eine rationale Funktion durch ihre Pole und Nullstellen bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt ist, so kann man

$$Z = \mathfrak{q}_Z = e \frac{\mathfrak{n}_Z}{\mathfrak{d}_Z}$$

setzen, wenn man unter e den Anfangskoeffizienten der Entwicklung von Z in der Umgebung eines ein für alle Male festgewählten Punktes $\bar{\mathfrak{p}}$ (etwa von $\mathfrak{p}_\infty$) versteht. Dann gehört zu dem Produkte bzw. dem Quotienten zweier Funktionen Z und Z' das Produkt $\mathfrak{q}_Z \cdot \mathfrak{q}_{Z'}$ bzw. der Quotient $\frac{\mathfrak{q}_Z}{\mathfrak{q}_{Z'}}$ seiner Divisoren.

Da eine rationale Funktion ebenso viele Nullstellen wie Pole besitzt, so ist die Ordnung eines jeden zu einer Funktion Z gehörigen Divisors $\mathfrak{q}_Z$ gleich Null, und umgekehrt zeigt man leicht, daß zu jedem Divisor der Ordnung Null stets eine und nur eine Funktion des Körpers gehört.

Hieran schließt sich die Einteilung aller Divisoren in *Klassen*, welche für die hier betrachteten rationalen Divisoren sehr einfach ist, aber für das höhere Gebiet der algebraischen Divisoren von großer Wichtigkeit wird. Wir rechnen alle rationalen Divisoren $Z = \mathfrak{q}_Z$ in eine Klasse E, die sogenannte *Einheits- oder Hauptklasse*, welche einem Elemente Z des rationalen Körpers $\Re(z)$ gleich sind. Die Hauptklasse enthält also alle und nur die Divisoren nullter Ordnung. Allgemeiner nennen wir zwei Divisoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ *äquivalent* und rechnen sie in eine Klasse Q, wenn ihr Quotient $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}'}$ ein Divisor der Hauptklasse oder also einer Funktion des Körpers gleich ist. Hieraus ergibt sich sofort, daß zwei Divisoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ dann und nur dann in dieselbe Klasse gehören, wenn sie von gleicher Ordnung sind.

Es gibt unendlich viele Divisorenklassen, nämlich für jeden ganzzahligen Wert der Ordnungszahl eine einzige; z. B. gehört zur Ordnungszahl 1 die Klasse A, deren Divisoren $(\mathfrak{p}\mathfrak{q}_Z)$ alle einem beliebigen Primteiler $\mathfrak{p}$ äquivalent sind; sie enthält überhaupt alle Primteiler, und diese sind die einzigen *ganzen* Divisoren dieser Klasse.

Sind Q und R zwei Divisorenklassen, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ irgendwelche Divisoren derselben, so sind alle Produkte $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ die sämtlichen Divisoren einer einzigen neuen Klasse, welche durch QR bezeichnet werde; und ebenso bilden alle Quotienten $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}$ eine andere Klasse, welche $\frac{Q}{R}$ ge-

nannt wird. Die Hauptklasse E ist die einzige, durch deren Multiplikation und Division eine beliebige Klasse Q nicht geändert wird, für welche also stets $QE = \frac{Q}{E} = Q$ ist. Ist A die oben charakterisierte Divisorenklasse erster Ordnung, so sind alle Divisorenklassen in der Reihe:

$$\ldots, A^{-2}, A^{-1}, E, A, A^2, \ldots$$

enthalten.

II. Der Körper $K(u, z)$ der algebraischen Funktionen einer Variablen.

4. Allgemeine Sätze über die algebraischen Funktionen. Aufgabe der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen ist die Untersuchung aller rationalen Funktionen $U = \varphi(u, z)$ der beiden Variablen u und z mit konstanten Koeffizienten unter der Voraussetzung, daß u Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades

$$f(u, z) = u^n - a_{n-1}(z)u^{n-1} + \cdots \pm a_0(z) = 0 \tag{4}$$

mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten ist. Man kann eine beliebig gegebene Funktion $f(u, z)$ auf rationalem Wege in ihre irreduktiblen Faktoren zerlegen; deshalb kann und soll gleich vorausgesetzt werden, daß $f(u, z)$ irreduktibel ist.[4])

Jeder Stelle $\mathfrak{p}$ der unabhängigen Variablen ($z = \alpha$, bzw. $z = \infty$) entsprechen stets n gleiche oder verschiedene Zahlenwerte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von u; u ist also eine n-deutige Funktion von z. Jede symmetrische Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_n$ ist eine rationale Funktion von z.

Die Gesamtheit aller Funktionen $U = \varphi(u, z)$ bildet einen Körper $K(u, z)$. Jede Größe U dieses Körpers genügt ebenfalls einer sog. Hauptgleichung n^{ten} Grades

$$F(U, z) = U^n - b_{n-1}(z)U^{n-1} + \cdots \pm b_0(z) = 0, \tag{4a}$$

deren linke Seite entweder selbst irreduktibel oder die Potenz einer irreduktiblen Funktion ist; jedes Element $U = \varphi(u, z)$ von $K(u, z)$ ist also auch eine n-deutige Funktion von z, und zwar hängen für jede Stelle $\mathfrak{p}$ von z die n konjugierten Zahlen U_i mit den Zahlen u_i durch die Gleichungen $U_i = \varphi(u_i, z)$ zusammen. Speziell heißt

$$n(U) = b_0(z) = U_1 U_2 \ldots U_n \tag{5}$$

die *Norm* von U; es bestehen die Gleichungen

$$n(UV) = n(U)n(V), \quad n\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{n(U)}{n(V)}. \tag{5a}$$

4) Vgl. I B 1 b, 5.

Ferner heißt das Determinantenquadrat:

$$(6)\quad d(U) = |\,1, U_i, U_i^2, \ldots U_i^{n-1}\,|^2 = \prod_{i<k}(U_i - U_k)^2 \quad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

die *Diskriminante* von U.

Ist $d(U)$ nicht identisch Null, so heißt U eine *primitive Funktion* des Körpers; nur in diesem Falle ist die Hauptgleichung $F(U,z) = 0$ selbst irreduktibel.

Es seien endlich $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)}$ n Funktionen des Körpers $K(u,z)$, und es mögen allgemein:

$$(7)\qquad U_i^{(1)}, U_i^{(2)}, \ldots, U_i^{(n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

die konjugierten Zahlenwerte derselben für irgendeinen Wert von z bedeuten. Dann heißt das allgemeinere Determinantenquadrat:

$$(8)\qquad d(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)}) = |\,U_i^{(1)}, U_i^{(2)}, \ldots, U_i^{(n)}\,|^2$$

die *Diskriminante des Systems* $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)})$. Die n Funktionen $U^{(i)}$ sind dann und nur dann rational abhängig, d. h. zwischen ihnen besteht eine homogene lineare Gleichung

$$c_1 U^{(1)} + c_2 U^{(2)} + \ldots + c_n U^{(n)} = 0$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $c_i(z)$, wenn ihre Diskriminante identisch Null ist.

Jede Funktion U des Körpers $K(u,z)$ kann auf eine einzige Weise in der Form:

$$(9)\qquad U = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + c_{n-1} u^{n-1}$$

mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten dargestellt werden, Daher heißt das System $(1, u, \ldots, u^{n-1})$ eine *Basis* des Körpers $K(u,z)$. Allgemeiner bildet das System $(1, U, \ldots, U^{n-1})$ eine Basis des Körpers, wenn U eine primitive Funktion, also $d(U) \gtrless 0$ ist, und das Gleiche gilt für jedes System $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)})$, dessen Elemente rational unabhängig sind, dessen Diskriminante $d(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)})$ also nicht Null ist.[5])

5) Die Entwicklungen von Nr. 4 werden bei *H.-L.* unter Benutzung konjugierter Zahlenwerte einer Funktion durchgeführt. Da bei *D.-W.* auf Benutzung der Reihenentwicklungen verzichtet wird und die Möglichkeit, für jeden Wert von z den Funktionen des Körpers gewisse Werte beizulegen, erst am Schlusse der Untersuchung begründet wird, muß dort auf mehr formale Betrachtungen zurückgegriffen werden, die ähnlich durchgeführt werden wie in der Idealtheorie. (Vgl. z. B. *Dirichlet-Dedekind,* Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl. 1894, p. 487 ff.)

Ist $\eta_1, \ldots, \eta_n$ eine Basis, und ζ eine beliebige Funktion des Körpers, so lassen sich die Produkte $\zeta\eta_1, \ldots, \zeta\eta_n$ durch die Basis (η_i) so darstellen: $\zeta\eta_k = \sum_{i=1}^{i=n} y_{ki}\eta_i (k = 1, \ldots, n)$, wo y_{ki} rationale Funktionen von z sind. An die

5. Untersuchung der Funktionen des Körpers $K(u, z)$ in der Umgebung einer Stelle der unabhängigen Variablen. In der Umgebung einer endlichen oder der unendlich fernen Stelle $\mathfrak{p}(z = \alpha$ oder $z = \infty)$ der Variablen z sind die Koeffizienten $a_i(z)$ der Grundgleichung (4) in nach ganzen Potenzen der Entwicklungsfunktion $p\left(z - \alpha \text{ bzw. } \frac{1}{z}\right)$ fortschreitende Potenzreihen entwickelbar, d. h. sie gehören dem umfassenderen Körper $\overline{K}(\mathfrak{p})$ der Potenzreihen in $\mathfrak{p}$ an. Während nun die linke Seite $f(u, z)$ der Grundgleichung im Körper $K(z)$ der rationalen Funktionen von z als unzerlegbar vorausgesetzt werden konnte, ist sie dies in dem weiteren Bereich $\overline{K}(\mathfrak{p})$ der Potenzreihen in $\mathfrak{p}$ im allgemeinen nicht, sondern sie zerfällt in ein Produkt von unter sich verschiedenen unzerlegbaren Faktoren, deren Koeffizienten $c_i(\mathfrak{p})$ für die Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}$ rationalen Charakter haben, ohne doch rationale Funktionen von z zu sein. Auch hier gibt es ein rationales endliches Verfahren, um diese Zerlegung mit jeder vorgegebenen Genauigkeit zu machen, und

---

sich daraus für ζ ergebende Hauptgleichung:

$$(-1)^n \varphi(\zeta) = \begin{vmatrix} y_{11} - \zeta, & y_{12}, & \cdots, & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22} - \zeta, & \cdots, & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \cdots, & y_{nn} - \zeta \end{vmatrix} = 0,$$

deren Unabhängigkeit von der Wahl der Basis aus dem Multiplikationssatz der Determinanten folgt, knüpfen die weiteren Definitionen an. Die Norm $n(\zeta)$ von ζ definieren *D.-W.* als die Determinante $|\, y_{ik} \,|$ $(i, k = 1, \ldots, n)$. Es folgt dann, daß für jede rationale Funktion t von z $\varphi(t) = n(t - \zeta)$ ist. Die Spur $s(\zeta)$ von ζ wird als $y_{11} + y_{22} + \cdots + y_{nn}$ definiert. (Die Funktion $\varphi(t)$ stimmt mit der Funktion $(t - \zeta)(t - \zeta_1) \ldots (t - \zeta_{n-1})$ überein, wo $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ die zu ζ konjugierten Funktionen sind.) Alle Eigenschaften der Funktionen $\varphi(t)$, $n(\zeta)$, $s(\zeta)$ werden nun durch entsprechende Wahl der Basis (η_i) bewiesen. Die Diskriminante eines Systems von n Funktionen (η_i) $(i = 1, \ldots, n)$ wird durch die Gleichung:

$$\Delta(\eta_1, \ldots, \eta_n) = |\, S(\eta_i \eta_k) \,| \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

definiert, ohne Benutzung der konjugierten Basen. Die Diskriminante einer Funktion U wird als $\Delta(1, U, \ldots, U^{n-1})$ definiert. Die Ausdrücke aller dieser Größen durch konjugierte Werte einer Funktion werden bei *D.-W.* erst nach Einführung der absoluten *Riemann*schen Fläche abgeleitet, p. 243—247 (§ 16. Konjugierte Werte und konjugierte Punkte). [*O*]

In der Abhandlung „Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen", Math. Ztschr. 5 (1919), p. 118—131, führt *Hensel* diese Theorie auf diejenige der Kongruenzkörper $K(u, \mathrm{mod}\, f(u, z))$ aller modulo $f(u, z)$ ganzen rationalen Funktionen von u mit in z rationalen Koeffizienten für $f(u, z)$ als Modul zurück. Die in Nr. 5—7 gegebene Darstellung der Theorie knüpft an diese Arbeit an.

sie ist nur auf eine einzige Art möglich. Somit kann und soll die Untersuchung zunächst auf den einfachsten Fall beschränkt werden, daß die linke Seite der Grundgleichung $f(u, z)$ selbst nicht bloß für den Bereich $K(z)$ der rationalen Funktionen, sondern auch für den Bereich $\overline{K}(\mathfrak{p})$ der Potenzreihen in $\mathfrak{p}$ irreduktibel ist.

6. Die Grundgleichung ist für den Bereich $\overline{K}(\mathfrak{p})$ irreduktibel. Wir betrachten zuerst die Gesamtheit aller rationalen Funktionen $U = \varphi(u, \mathfrak{p})$ von u, deren Koeffizienten Potenzreihen in $\mathfrak{p}$ sind modulo $f(u, z)$. Auch sie bilden einen Körper $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$, welcher aus dem Körper $\overline{K}(\mathfrak{p})$ der konvergenten oder nicht konvergenten Potenzreihen in $\mathfrak{p}$ durch Hinzunahme oder Adjunktion des einen Elementes u hervorgeht. Jede dieser Funktionen U läßt sich modulo $f(u, z)$ auf eine einzige Weise in der Form:

$$U = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_{n-1} u^{n-1} \tag{10}$$

mit Koeffizienten in $\overline{K}(\mathfrak{p})$ darstellen. Die rationalen Funktionen von u und z, d. h. die Funktionen des Körpers $K(u, z)$, bilden einen Teilkörper dieses Körpers, alle für diesen gefundenen Ergebnisse gelten demnach auch für den Körper $K(u, z)$. Jede Funktion U genügt wieder einer Hauptgleichung

$$F(U, \mathfrak{p}) = U^n - b_{n-1}(\mathfrak{p}) U^{n-1} + \cdots \pm b_0(\mathfrak{p}) = 0, \tag{11}$$

deren Koeffizienten Potenzreihen in $\mathfrak{p}$ sind, und welche in $\overline{K}(\mathfrak{p})$ entweder selbst irreduktibel oder die Potenz einer irreduktiblen Funktion ist. Durch die Voraussetzung der Irreduktibilität der Grundgleichung für den Bereich $\overline{K}(\mathfrak{p})$ gestalten sich die folgenden Überlegungen sehr einfach.

Auch hier werde dem Werte $z = \alpha$ bzw. $z = \infty$, welchem im Körper der rationalen Funktionen von z die Stelle $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}_\infty$ entspricht, im Körper $K(u, z)$ der rationalen Funktionen von u und z eindeutig eine einzige Stelle $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}_\infty$ zugeordnet. Dieselbe Stelle ordnen wir auch jenem Werte von z für den größeren Körper $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ der rationalen Funktionen von u mit Potenzreihen in $\mathfrak{p}$ als Koeffizienten zu.

Ein Element U heißt *algebraisch ganz* oder *gebrochen*, je nachdem *alle* Koeffizienten $b_i(\mathfrak{p})$ seiner Hauptgleichung (11) ganz sind oder nicht. Aus der Irreduktibilität der Grundfunktion $f(u, z)$ folgt dann der Fundamentalsatz:

> Ein Element U des Körpers $K(u, \mathfrak{p})$ ist algebraisch ganz oder gebrochen, je nachdem seine Norm $n(U) = b_0(\mathfrak{p})$ ganz oder gebrochen ist.

Hieraus ergeben sich sofort die Sätze, daß die Summen, die Diffe-

renzen und die Produkte von ganzen Elementen wieder ganz sind, daß diese also einen Ring im Körper $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ bilden. Von zwei beliebigen Elementen U und V heißt das erste durch das zweite *teilbar*, wenn $\frac{U}{V}$ ganz, wenn also $n(U)$ durch $n(V)$ teilbar ist, sie heißen *äquivalent*, wenn ihre Normen gleiche Ordnungszahl haben. Ein Element ε heißt *eine Einheit*, wenn $n(\varepsilon)$ eine Einheit ist. Äquivalente Elemente unterscheiden sich hiernach um eine multiplikative Einheit ε.

Unter den ganzen Elementen gibt es solche, deren Norm eine positive aber möglichst kleine Ordnungszahl hat; jedes solche Element π heißt eine *Primfunktion* für den Körper $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ oder die ihnen zugeordnete Stelle $\mathfrak{P}$. Jedes andere Element U ist eindeutig in der Form $\varepsilon\pi^a$ darstellbar, wo ε eine Einheit bedeutet; die von der Auswahl von π unabhängige ganze Zahl a heißt *die Ordnungszahl* von U für die Stelle $\mathfrak{P}$. Im Körper $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ hört also das Element p auf, eine Primfunktion zu sein; an seine Stelle tritt das Element π oder irgendein äquivalentes $\pi' = \varepsilon\pi$.

Zwei Elemente U und U' heißen modulo $\mathfrak{P}^\varrho$ *kongruent*, wenn sie modulo π^ϱ kongruent sind, wenn also $U - U'$ durch π^ϱ algebraisch teilbar ist; sie heißen *für die Stelle* $\mathfrak{P}$ *gleich*, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{P}$ kongruent sind. Dies ist stets und nur dann der Fall, wenn jene beiden Elemente nicht verschieden sind.

Jedes ganze Element U ist modulo $\mathfrak{P}$ einer einzigen endlichen Konstanten c kongruent, nämlich derjenigen Zahl c, für welche $n(c - U)$ durch p teilbar ist. Allgemeiner ist jedes ganze oder gebrochene Element für eine beliebige Potenz $\mathfrak{P}^r$ von $\mathfrak{P}$ einer einzigen Reihe

$$c_a\pi^a + c_{a+1}\pi^{a+1} + \cdots + c_{r-1}\pi^{r-1}$$

mit konstanten Koeffizienten kongruent.

Wir betrachten nur den Körper $\overline{K}(\mathfrak{P})$ aller Potenzreihen

$$c_a\pi^a + c_{a+1}\pi^{a+1} + \cdots + c_r\pi^r + \cdots \tag{12}$$

in π mit konstanten Koeffizienten, gleichgültig, ob sie in einer endlichen Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ konvergieren oder nicht, bezeichnen die Reihe der Elemente $c_a\pi^a$, $c_a\pi^a + c_{a+1}\pi^{a+1}$, ... als *ihre Näherungswerte* und nennen zwei solche Reihen wieder *kongruent modulo* $\mathfrak{P}^r$, wenn alle ihre Näherungswerte modulo $\mathfrak{P}^r$ kongruent sind. Wir nennen sie *gleich für den Bereich von* $\mathfrak{P}$, wenn sie für jede Potenz von $\mathfrak{P}$ kongruent, wenn sie also identisch sind. Endlich soll ein Element U von $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ und eine solche Potenzreihe *gleich* genannt werden, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{P}$ kongruent sind.

Dann ist jedes Element des Körpers $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ einer einzigen Potenzreihe von $\bar{K}(\mathfrak{P})$ gleich und umgekehrt, diese beiden Körper sind also identisch.

Hieraus folgt nun, daß jede Primfunktion π ein primitives Element innerhalb $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ ist, und daß $n(\pi) = pE(p)$ von der ersten Ordnung ist. Die Primfunktionen sind also vollständig durch den folgenden wichtigen Satz charakterisiert:

Eine algebraische Funktion π ist stets und nur dann für den algebraischen Körper $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ eine Primfunktion, wenn ihre Norm $n(\pi)$ für den rationalen Körper $\bar{K}(\mathfrak{p})$ eine Primfunktion ist.

Hieraus folgt sofort der allgemeinere Satz:

Besitzt $U = \varepsilon\pi^a$ in der Stelle $\mathfrak{P}$ die Ordnungszahl a, so hat $n(U)$ in der zugeordneten Stelle $\mathfrak{p}$ die gleiche Ordnungszahl.

Unter den äquivalenten Primfunktionen kann man π stets so auswählen, daß es der einfachsten Gleichung

$$\pi^n - (z - \alpha) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \pi^n - \frac{1}{z} = 0 \tag{13}$$

genügt. Die n konjugierten Werte dieser Primfunktion sind also

$$\pi_i = w^i(z - \alpha)^{\frac{1}{n}} \quad \text{bzw.} \quad \pi_i = w^i\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (i = 0, 1, \ldots n-1) \tag{13a}$$

wo w eine primitive n^{te} Einheitswurzel bedeutet. Im Folgenden wird meistens *diese* Primfunktion benutzt werden.

Es sei nun U ein beliebiges Element des Körpers $K(u, \mathfrak{p})$ und $F(U, \mathfrak{p}) = 0$ die zugehörige Hauptgleichung n^{ten} Grades, ferner möge für die Primfunktion $\pi = (z - \alpha)^{\frac{1}{n}}$ bzw. $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$U_1 = c_a\pi^a + c_{a+1}\pi^{a+1} + \cdots \qquad (\mathfrak{P})$$

die Darstellung von U für den Bereich von $\mathfrak{P}$ sein und es bedeuten:

$$\begin{aligned} U_i &= c_a\pi_i^a + c_{a+1}\pi_i^{a+1} + \cdots \\ &= c_a w^{ia}\pi^a + c_{a+1}w^{i(a+1)}\pi^{a+1} + \cdots \quad (\mathfrak{P}) \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned}$$

die $n-1$ zu U_1 konjugierten Potenzreihen, welche alle die gleiche Ordnungszahl a besitzen.[6]) Dann zerfällt die linke Seite der Hauptgleichung im Körper $\bar{K}(\mathfrak{P})$ eindeutig in das Produkt der n Linearfaktoren:

$$F(U, \mathfrak{p}) = (U - U_1)(U - U_2)\cdots(U - U_n) \qquad (\mathfrak{P}). \tag{14}$$

Aus diesem Grunde sollen dem Elemente U für den Bereich der Stelle

---

6) An die Reihenentwicklungen knüpft die Definition der *Ordnungszahl* einer algebraischen Funktion an einer bestimmten Stelle zuerst *Weierstraß* an. V. 1873. *B.-N.*, p 381; *H.-L.*, p. 141—145. [*O*]

$\mathfrak{P}$ diese n Potenzreihen U_i zugeordnet und als *die n konjugierten Wurzeln* der Gleichung $F(U, \mathfrak{p}) = 0$ für den Bereich jener Stelle bezeichnet werden. Dieselben sind stets und nur dann voneinander verschieden, wenn U ein primitives Element ist, und es ist $n(U) = U_1 \dots U_n$.

Betrachtet man an Stelle des Körpers $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ aller modulo $f(u, z)$ ganzen rationalen Funktionen von u mit konvergenten oder nicht konvergenten Koeffizienten in $\bar{K}(\mathfrak{p})$ nur den Bereich $K(u, \mathfrak{p})$ der rationalen Funktionen von u mit *konvergenten* Potenzreihen in p als Koeffizienten, so bilden auch diese einen Körper, also einen Teilkörper von $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$, wenn die Grundfunktion $f(u, z)$ auch innerhalb $K(\mathfrak{p})$ unzerlegbar ist; auch dieser enthält den zu untersuchenden Körper $K(u, z)$ der rationalen Funktionen von z und u als Teilkörper. Jedes Element U dieses Körpers $K(u, \mathfrak{p})$ genügt einer Hauptgleichung $F(U, \mathfrak{p}) = 0$ mit *konvergenten* Koeffizienten, deren linke Seite für den Bereich von $\mathfrak{P}$ ebenfalls in das Produkt der n konjugierten Linearfaktoren (14) zerfällt. Dann kann man wieder durch Majorantenbildung den Nachweis führen[6a]), daß in diesem Falle die n konjugierten Wurzeln $U_1, U_2, \dots U_n$ *konvergente* Potenzreihen sind. Diese Reihen stellen auch die n konjugierten Wurzeln der Gleichung $F(U, \mathfrak{p}) = 0$ für alle Werte von z in einer endlichen Umgebung der Stelle α dar. Man nennt sie *die zur Stelle $\mathfrak{P}$ gehörigen Funktionselemente für die algebraische Funktion U.*

Geometrisch betrachtet können diese Werte der algebraischen Funktion U in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ eindeutig auf n Blättern ausgebreitet werden, welche in einem n-blättrigen Verzweigungspunkte zusammenhängen, der jetzt ebenfalls durch $\mathfrak{P}$ bezeichnet werde. So entspricht dann dem Punkte $\mathfrak{p}$ auf der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ dieser n-blättrige Verzweigungspunkt $\mathfrak{P}$ eindeutig.

7. Allgemeiner Fall: Die Grundgleichung zerfällt innerhalb $K(\mathfrak{p})$ in mehrere irreduktible Faktoren. Es werde jetzt der allgemeinste Fall betrachtet, daß die Grundgleichung innerhalb des Körpers $K(\mathfrak{p})$ der konvergenten Potenzreihen für $\mathfrak{p}$ reduktibel sei; dann zerfällt sie in ein eindeutig bestimmtes Produkt irreduktibler Faktoren. Es sei:

$$f(u, z) = f_1(u, \mathfrak{p}) f_2(u, \mathfrak{p}) \dots f_\nu(u, \mathfrak{p}) \tag{15}$$

diese Zerlegung, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\nu$ seien die Grade der ν irreduktiblen Faktoren in u. Dann folgt aus der Anwendung der soeben gefun-

---

6a) *H.-L.*, p. 68—73. Im Gegensatz zu „*E. N.*", p. 184, glaube ich, daß auch diese Majorantenmethode als rein arithmetische anzusehen ist; hierauf werde ich an anderer Stelle zurückkommen.

denen Ergebnisse auf die einzelnen irreduktiblen Gleichungen, daß die n Wurzeln der Grundgleichung in ν Zyklen

$$(16) \qquad u_1^{(1)}, \ldots u_{\lambda_1}^{(1)};\ u_1^{(2)}, \ldots u_{\lambda_2}^{(2)};\ \ldots;\ u_1^{(\nu)}, \ldots u_{\lambda_\nu}^{(\nu)}$$

zerfallen; jeder Zyklus enthält die Wurzeln von je einem dieser irreduktiblen Faktoren. Allgemein können die Wurzeln $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \ldots u_{\lambda_i}^{(i)}$ von $f_i(u, \mathfrak{p}) = 0$ in *konjugierte* Potenzreihen entwickelt werden, welche nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{\lambda_i}}$ bzw. $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\lambda_i}}$ fortschreiten und höchstens eine endliche Anzahl von Gliedern mit negativem Exponenten enthalten. Diese Reihen stellen λ_i unter den n Wurzeln der Grundgleichung für eine endliche Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}$ dar und sind in dieser Umgebung (eventuell mit Ausnahme des Punktes $\mathfrak{p}$ selbst) stetige Funktionen ihres Argumentes. Genau dasselbe gilt für die Wurzeln der Hauptgleichung $F(U, z) = 0$, der ein beliebiges Element U des Körpers $K(u, z)$ genügt und deren linke Seite für den Bereich von $\mathfrak{p}$ in gleicher Weise zerfällt.

Wir ordnen nun der Stelle $\mathfrak{p}$ im rationalen Körper $K(z)$ die ν Stellen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\nu$ in dem algebraischen Körper $K(u, z)$ zu, entsprechend den ν für den Bereich $K(\mathfrak{p})$ irreduktiblen Faktoren $f_i(u, \mathfrak{p})$ der Grundgleichung bzw. den ν Zyklen $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \ldots u_{\lambda_\nu}^{(i)}$ ihrer Wurzeln, und sagen allgemein, daß jede Funktion U des Körpers $K(u, z)$ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}_i$ die λ_i konjugierten Darstellungen besitzt, welche aus einer unter ihnen:

$$(17) \qquad U = a_{\varrho_i}(z-\alpha)^{\frac{\varrho_i}{\lambda_i}} + a_{\varrho_i+1}(z-\alpha)^{\frac{\varrho_i+1}{\lambda_i}} + \cdots$$

durch Ersatz der Wurzel $(z-\alpha)^{\frac{1}{\lambda_i}}$ durch ihre konjugierten $w_i^a(z-\alpha)^{\frac{1}{\lambda_i}}$ für $a = 0, 1, \ldots (\lambda_i - 1)$ hervorgehen.[7]) Jeder dieser Stellen $\mathfrak{P}_i$ ordnen wir endlich einen gleichbezeichneten Primteiler $\mathfrak{P}_i$ zu und setzen fest, daß U genau *durch* $\mathfrak{P}_i^{\varrho_i}$ *teilbar* heißen soll, wenn U in der Stelle $\mathfrak{P}_i$ die Ordnungszahl ϱ_i besitzt. Diese Stelle ist eine ein- oder mehrfache Nullstelle oder ein Pol, je nachdem ϱ_i eine positive oder negative Zahl ist. Speziell ist der der Stelle $\mathfrak{p}$ zugeordnete Linearfaktor $z-\alpha$ bzw. $\frac{1}{z}$ genau durch $\mathfrak{P}_i^{\lambda_i}$ teilbar. Geometrisch können die Werte der algebraischen Funktion U in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}_i$ eindeutig

7) Der Gedanke, die *Definition* der *Stelle* des algebraischen Gebildes an die Reihenentwicklungen zu knüpfen, rührt von *Weierstraß* her. V. 1873, *B.-N.*, p. 379; *Baker*, Math. Ann. 45 (1892); die Benutzung der für den Bereich $K(\mathfrak{p})$ irreduktiblen Faktoren der Grundgleichung wird durch zahlentheoretische Analoga nahe gelegt. Vgl. *Hensel*, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig, p. 168 ff. [*O*]

auf die λ_i Blätter ausgebreitet werden, welche in einem λ_i-blättrigen Verzweigungspunkte, der jetzt ebenfalls $\mathfrak{P}_i$ genannt werde, zusammenhängen. So entspricht dann dem Punkte $\mathfrak{p}$ auf der einblättrigen Kugelfläche eindeutig das System der ν Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\nu$ von je $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ Blättern, oder dem rationalen Primteiler $\mathfrak{p}$ das System der ν algebraischen Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\nu$. Man sagt, ein Primteiler $\mathfrak{P}$ besitzt die *Verzweigungsordnung* $\lambda - 1$, wenn in dem zugehörigen Punkte $\mathfrak{P}$ λ Blätter zusammenhängen, oder wenn der zugeordnete irreduktible Faktor der Grundgleichung vom λ^{ten} Grade ist. Es gibt nur eine endliche Anzahl von Primfaktoren einer positiven Verzweigungsordnung; alle übrigen Punkte heißen *regulär*; für sie schreitet die eine zugehörige Potenzreihe $U(\mathfrak{P})$ nach *ganzen* Potenzen des Linearfaktors $z - \alpha$ bzw. $\frac{1}{z}$ fort; sie gehört also selbst dem Körper $K(\mathfrak{p})$ der konvergenten Potenzreihen in $\mathfrak{p}$ an.

8. Die dem Körper $K(u, z)$ zugeordnete Riemannsche Kugelfläche $\mathfrak{K}_z$.[8]) Man kann die Werte, welche u oder eine beliebige Funktion U von $K(u, z)$ für alle Werte der unabhängigen Variablen annimmt, eindeutig und im allgemeinen stetig entweder auf n unendlich nahe untereinander gelagerten komplexen Zahlenebenen oder, was anschaulicher ist, auf n unendlich nahen ineinander liegenden konzentrischen Einheitskugeln $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ ausbreiten. Diese letzteren mögen in der Einheitskugel $\mathfrak{K}$ für die unabhängige Variable z und konzentrisch zu dieser liegen. Es sei nun $\mathfrak{p}^{(0)}$ ein Punkt von $\mathfrak{K}$, welchem n reguläre Punkte $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \mathfrak{P}_2^{(0)}, \ldots \mathfrak{P}_n^{(0)}$ entsprechen, und diese mögen durch die genau unter $\mathfrak{p}^{(0)}$ liegenden Punkte von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ repräsentiert werden; ferner sollen die zugehörigen Potenzreihen $u(\mathfrak{P}_1^{(0)}), u(\mathfrak{P}_2^{(0)}), \ldots u(\mathfrak{P}_n^{(0)})$ sämtlich regulär sein. Denkt man sich nun in bekannter Weise diejenigen Punkte, welche Verzweigungsstellen und Polen von u entsprechen, durch kleine Kreise ausgeschlossen, und diese Kreise durch Schnitte verbunden, setzt man dann jene n Funktionselemente simultan über diese n zerschnittenen Kugelflächen analytisch fort und heftet sie endlich in geeigneter Weise zusammen, so erhält man den Wertevorrat von u eindeutig und, mit Ausnahme der Pole, auch stetig auf der so gewonnenen *Riemannschen Kugelfläche* $\mathfrak{K}_z$ ausgebreitet. Die n-blättrige *Riemann*sche Fläche $\mathfrak{K}_z$ wird jetzt von der einblättrigen Fläche $\mathfrak{K}$ so umhüllt, daß die jedem Punkte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ zugeordneten Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\nu$ von $\mathfrak{K}_z$ genau untereinander und unter $\mathfrak{p}$ liegen. Jede Funktion U von $K(u, z)$ ist dann auf der *Riemann*schen Fläche $\mathfrak{K}_z$ eindeutig und bis auf eine endliche Anzahl

8) Vgl. II B 1, Nr. 11—12, 22; II B 2, Nr. 4—6. [*O*]

von Polen auch stetig, und umgekehrt gehört jede analytische Funktion, welche diese Eigenschaften besitzt, dem Körper $\mathfrak{K}(u, z)$ an.

Die n-blättrige Kugelfläche $\mathfrak{K}_z$ ist dann und nur dann *zusammenhängend* im Sinne der Analysis Situs, wenn die Grundgleichung n^{ten} Grades für u innerhalb des Körpers $K(z)$ irreduktibel ist[9]); und allein in diesem Falle wird durch sie u als eine einzige analytische Funktion von z definiert.

9. Direkte Berechnung der zu einer Stelle $\mathfrak{p}$ gehörigen Wurzelzyklen.[10]) Das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Diagramm. Die direkte Auffindung der zu einer Stelle $\mathfrak{p}(z = \alpha$ bzw. $z = \infty)$ gehörigen Wurzelzyklen $u(\mathfrak{P}_i)$ wird durch eine Erweiterung des sogenannten *Newtonschen Diagramms* wesentlich erleichtert. Sei:

$$f(u, z) = A_0(z) + A_1(z)u + \cdots + A_n(z)u^n = 0 \tag{18}$$

die Grundgleichung für $K(u, z)$, und es sei allgemein für die Stelle $\mathfrak{p}$:

$$A_i(z) = a_i(z - \alpha)^{\varrho_i} + \cdots \text{ bzw. } A_i(z) = a_i\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_i} + \cdots. \tag{19}$$

Dann fixieren wir in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem die n Punkte:

$$\mathfrak{A}_0 = (0, \varrho_0),\ \mathfrak{A}_1 = (1, \varrho_1),\ \ldots\ \mathfrak{A}_n = (n, \varrho_n).$$

Man verbinde dann den letzten Punkt $\mathfrak{A}_n$ mit demjenigen Punkte $\mathfrak{A}_t$, welcher von $\mathfrak{A}_n$ aus gesehen am tiefsten, und, falls es deren mehrere geben sollte, außerdem möglichst entfernt von $\mathfrak{A}_n$ liegt, und ziehe die Sehne $\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_t$; hierauf mache man von $\mathfrak{A}_t$ aus dieselbe Konstruktion und fahre so lange fort, bis $\mathfrak{A}_0$ erreicht ist. So erhält man ein nach unten konvexes Polygon $\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_s \ldots \mathfrak{A}_0$, durch welches das Punktsystem nach unten begrenzt wird. Dann gehören zu jeder dieser Begrenzungssehnen etwa zu $\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_s$ genau $t - s$ Wurzeln $u(\mathfrak{P}) = e_0^{(i)}(z - \alpha)^{\varepsilon_0} + e_1^{(i)}(z - \alpha)^{\varepsilon_1} + \cdots$, deren Anfangsexponenten ε_0 alle dieselben und zwar gleich der Steigung $-\frac{\varrho_t - \varrho_s}{t - s}$ der betreffenden Sehne sind; die $t - s$ Anfangskoeffizienten $e_0^{(i)}$ sind die $t - s$ von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$\varphi(e) = a_t e^t + \cdots + a_k e^k + \cdots + a_s e^s = 0. \tag{20}$$

In dieser Gleichung sind $a_t, \cdots a_k, \cdots a_s$ die Anfangskoeffizienten derjenigen Gleichungskoeffizienten $A_i(z)$ in (18), für welche die zugehörigen Diagrammpunkte $\mathfrak{A}_t, \ldots \mathfrak{A}_k, \ldots \mathfrak{A}_s$ auf der betreffenden Begrenzungssehne $\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_s$ liegen.

---

9) Der Satz stammt von *Puiseux* her. Vgl. II B 1, Anm. 58. [*O*]

10) Vgl. II B 2, Nr. 2—3. [*O*]

Durch Fortsetzung desselben Verfahrens kann man das zweite Glied $e_1^{(i)}(z-\alpha)^{e_1}$ einer beliebigen Wurzel u_i berechnen usf., und die Konvergenz der n so sich ergebenden Potenzreihen $u(\mathfrak{P})$ vollständig nachweisen.[11]) Für jeden der ν für die Stelle $\mathfrak{p}$ irreduktiblen Faktoren $f_i(u, \mathfrak{p})$, deren Wurzeln einem Verzweigungspunkte entsprechen, besitzt das zugehörige *Newton*sche Diagramm eine einzige Seite, und die zugehörige Funktion $\varphi_i(e)$ hat die Form:

$$\varphi_i(e) = (e^{l_0} - e_0^{l_0})^{\delta} = 0 \tag{21}$$

wo $l_0\delta = \lambda_i$ ist.[12])

10. Untersuchung der algebraischen Funktionen des Körpers für alle Stellen der Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{K}_z$. Die algebraischen Divisoren. Es seien wie in Nr. 3 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ r beliebige Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}_z$ und zugleich die ihnen zugeordneten Primteiler; sind ferner $h_1, h_2, \ldots h_r$ beliebige ganze Zahlen einschließlich Null, so stellen wir genau dieselbe Definition wie a. O. für die Teilbarkeit einer algebraischen Funktion U durch den algebraischen Teiler oder Divisor:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1^{h_1}\mathfrak{P}_2^{h_2}\cdots\mathfrak{P}_r^{h_r} \tag{22}$$

auf. Auch hier heißt die Zahl $q = h_1 + h_2 + \cdots + h_r$ die *Ordnung* von $\mathfrak{D}$, und $\mathfrak{D}$ heißt ein *ganzer Divisor*, wenn alle Exponenten nicht negativ sind; sonst wird $\mathfrak{D}$ ein *gebrochener Divisor* genannt. Wir definieren das Produkt $\mathfrak{D}\mathfrak{R}$ und den Quotienten $\mathfrak{D}/\mathfrak{R}$ zweier Divisoren

11) *H.-L.* (1902), p. 47—77.

12) Allgemeiner kann man jedem Polynom

$$f(u, z) = A_0(z) + A_1(z)u + \cdots + A_n(z)u^n$$

in u mit Potenzreihen von z als Koeffizienten durch die oben entwickelte Konstruktion ein Diagramm zuordnen. Dann gilt der Satz von *Dumas* (Thèse Paris [1904], p. 13): *Das Diagramm eines Produktes von zwei oder mehreren Polynomen in u entsteht aus den Diagrammen der einzelnen Faktoren, wenn man die einzelnen Seiten dieser Diagramme nach steigenden Neigungen anordnet und dann mit ihnen die Figur bildet, die zur Konstruktion ihrer geometrischen Summen dient.* Läßt man bei den Polynomen in u nur solche Potenzreihen als Koeffizienten zu, die nach *ganzen* Potenzen von z fortschreiten, so gelten die weiteren Sätze (*G. Dumas*, ebenda p. 16): Jedes Polynom, dessen Diagramm gebrochen ist, ist reduzibel. Jeder Seite des Diagramms entspricht ein Teiler des Polynoms, dessen Diagramm aus nur einer Seite von derselben Neigung und Länge besteht, und, bis auf eine Potenzreihe von z als Faktor, nur ein solcher Teiler. Die Sätze bleiben bestehen, wenn man den Potenzreihen, die als Koeffizienten auftreten, die Bedingung auferlegt, einen nicht verschwindenden Konvergenzbereich zu besitzen. Diese Sätze verwendet dann *Dumas* zur Ableitung von Reihenentwicklungen. Ein älteres Verfahren von *Brill* (Münch. Ber. 21 [1892], p. 207) beruht ebenfalls auf sukzessiver Zerlegung der linken Seite der Grundgleichung. [*O*]

genau wie in Nr. 3. Jeder gebrochene Divisor läßt sich dann wieder als Quotient $\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{n}} = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{g}}{\mathfrak{n}\mathfrak{g}}$ zweier ganzer Divisoren in der reduzierten oder auch in einer mit dem beliebigen ganzen Divisor $\mathfrak{g}$ erweiterten Form darstellen. Auch der Begriff der *Teilbarkeit* eines Divisors durch einen anderen sowie der *des größten gemeinsamen Teilers* $\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_\nu)$ mehrerer ganzer oder gebrochener Divisoren wird genau ebenso wie in der reinen Arithmetik definiert. Dieser größte gemeinsame Teiler ist dann und nur dann ganz, wenn das Gleiche für alle Divisoren $\mathfrak{Q}_i$ gilt.

Ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger algebraischer und $\mathfrak{p}$ der ihm zugeordnete rationale Divisor, so wollen wir $\mathfrak{p}$ die *Norm* von $\mathfrak{P}$ nennen und dieses Verhältnis durch die Gleichung $\mathfrak{p} = n(\mathfrak{P})$ ausdrücken; allgemeiner verstehen wir unter der Norm eines beliebigen algebraischen Divisors $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{h_1}\mathfrak{P}_2^{h_2}\ldots\mathfrak{P}_r^{h_r}$ den zugeordneten rationalen Divisor:

$$\mathfrak{q} = n(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{p}_1^{h_1}\mathfrak{p}_2^{h_2}\cdots\mathfrak{p}_r^{h_r}. \tag{23}$$

Die Ordnung eines algebraischen Divisors ist also stets gleich derjenigen seiner Norm.

Zu jedem Elemente U des Körpers $K(u, z)$ gehört ein algebraischer Divisor:

$$\mathfrak{Q}_U = e\frac{\mathfrak{d}_U}{\mathfrak{n}_U} = e\mathfrak{P}_1^{h_1}\mathfrak{P}_2^{h_2}\cdots\mathfrak{P}_k^{h_k}, \tag{24}$$

dessen Zähler $\mathfrak{d}_U$ durch die Nullstellen, dessen Nenner $\mathfrak{n}_U$ durch die Pole von U eindeutig bestimmt ist.[13]) Einem beliebigen Linearfaktor $z - \alpha = \frac{\mathfrak{p}_\alpha}{\mathfrak{p}_\infty}$ des rationalen Körpers entspricht z. B. der algebraische Divisor:

$$z - \alpha = \frac{\prod \mathfrak{P}_i^{(\alpha)^{l_i}}}{\prod \mathfrak{P}_k^{(\infty)^{m_k}}},$$

wenn allgemein zur Stelle $\mathfrak{p}_\alpha$ die l_i-blättrigen Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}_i^{(\alpha)}$, zur Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ die m_k-blättrigen Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}_k^{(\infty)}$ gehören. Durch Angabe ihres Divisors ist eine Funktion U bis auf eine Einheit, d. h. eine multiplikative Konstante e bestimmt; unter dieser wollen wir in naturgemäßer Verallgemeinerung der auf p. 541 gegebenen Vorschrift den Anfangskoeffizienten der Entwicklung von U in der Umgebung eines ein für alle Male festen regulären Punktes $\mathfrak{P}_0$ verstehen. Dann gehört zu dem Produkte bzw. dem Quotienten zweier Elemente von $K(u, z)$ das Produkt bzw. der Quotient seiner Divisoren. Ferner gehört zu der Norm von U, d. h. zu dem Produkte

13) Vgl. die Darstellung der Funktionen des Körpers durch Polygonquotienten bei *D.-W.*, p. 247—248. [*O*]

$U_1 U_2 \ldots U_n$ die Norm $\mathfrak{q} = n(\mathfrak{Q})$ des zugehörigen Divisors, so daß die Gleichung besteht $U_1 \ldots U_n = e_1 \ldots e_n \mathfrak{q}$. Da nun jede rationale Funktion von z allein, also auch $n(U)$, ebensoviele Nullstellen als Pole besitzt, d. h. die Ordnungszahl Null hat, so gilt dasselbe auch von jedem Divisor $\mathfrak{Q}_U$.

Alle zu Elementen des Körpers $K(u, z)$ gehörigen Divisoren haben mithin die Ordnungszahl Null, diese Funktionen besitzen also ebensoviele Nullstellen als Pole.

Die Anzahl ν_U der Pole oder der Nullstellen von U heißt *der Grad* dieser Funktion[14]); so ist z. B. jeder Linearfaktor $z - \alpha$, bzw. $\frac{1}{z}$ innerhalb des Körpers n^{ten} Grades $K(z, u)$ vom n^{ten} Grade; dann gilt der allgemeine Satz: Eine Funktion ν^{ten} Grades nimmt jeden reellen oder komplexen Wert an genau ν Stellen der *Riemann*schen Fläche $\mathfrak{R}_z$ an.

10 a. Die arithmetischen Begründungen des Punktbegriffes. Während die im Vorigen gegebene Darstellung der Theorie vom Punkt- oder Primdivisorenbegriff ausgeht, der durch die Theorie des Kongruenzkörpers sichergestellt wird, erscheint dieser Begriff in der ursprünglichen in *D.-W.* gegebenen Begründung der arithmetischen Theorie als einer der hauptsächlichsten Zielpunkte der ganzen Entwicklung. In dieser Darstellung fußt die Definition des *Punktes der absoluten Riemannschen Fläche* auf der mit Hilfe rein algebraischer und arithmetischer Prinzipien zu entwickelnden *Idealtheorie*, wobei allerdings die meisten Beweise zu reinen Existenzbeweisen werden.

D. und *W.* definieren den Punkt der zum *Körper K* gehörigen *absoluten Riemannschen Fläche* durch folgende Forderungen, bei denen der *invariante*, von jeglicher Auszeichnung bestimmter Funktionen des Körpers K unabhängige Charakter dieses Begriffes unmittelbar einleuchtet: Wenn jedem Element $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ von K ein Zahlenwert $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots$ so zugeordnet werden kann, daß $\alpha_0 = \alpha$ ist, falls α konstant ist, und allgemein $(\alpha \pm \beta)_0 = \alpha_0 \pm \beta_0$, $(\alpha\beta)_0 = \alpha_0\beta_0$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$ wird (zu den Zahlenwerten wird dabei auch ∞ gerechnet), so ordnen wir jeder solchen Zuordnung einen *Punkt der absoluten Riemannschen Fläche* von K zu und sagen, das Element α von K nehme in diesem Punkt den Wert α_0 an.[15])

Um nun den Umfang des hiermit eingeführten Punktbegriffes

14) Über die Definition des Grades einer algebraischen Funktion vgl. *Weierstraß* V. 1873, *B.-N.*, p. 381; *D.-W.*, p. 242—243; *H.-L.*, p. 156. [*O*]

15) *D.-W.*, p. 236.

genauer zu beschreiben, zeichnen wir ein nicht konstantes Element z von K aus. Jedes Element von K ist dann eine ganze oder gebrochene, rationale oder algebraische Funktion von z. Dabei ist jede gebrochene Funktion von z als Quotient von zwei ganzen Funktionen darstellbar. Als ein *Ideal* in z bezeichnen wir dann jede Gesamtheit von ganzen Funktionen aus K, die mit zwei Elementen α und β zugleich auch jedes Element $x\alpha + y\beta$ enthält, wo x, y beliebige ganze Elemente von K sind.[16]) Unter dem Produkt von zwei Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verstehen wir das aus möglichst vielen Elementen bestehende Ideal, das alle Produkte der Funktionen aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ enthält, unter dem Einheitsideal E, das aus allen ganzen Elementen von K bestehende Ideal. Eine im Ideal $\mathfrak{a}$ enthaltene Funktion heißt durch $\mathfrak{a}$ *teilbar*, zwei Funktionen, deren Differenz in $\mathfrak{a}$ enthalten ist, *modulo* $\mathfrak{a}$ *kongruent*. Es gilt nun der folgende Fundamentalsatz: *Ideale, die sich nicht als Produkt von zwei weiteren, von E verschiedenen Idealen darstellen lassen — Primideale — haben die charakteristische Eigenschaft, daß nach ihnen jede ganze Funktion von K einer Konstante kongruent ist. Jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *ist auf eine einzige Weise als ein Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar.*[17]) —

Unter den vielen Folgerungen aus diesem Satz heben wir nur eine hervor: Ist uns ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ gegeben, so ist jede Funktion f von K durch eine positive, verschwindende oder negative ganze Potenz von $\mathfrak{p}$ genau teilbar. Sind f_1 und f_2 durch die α^{te} bzw. β^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ genau teilbar, so sind $f_1 f_2$ und $\frac{f_1}{f_2}$ genau durch die $(\alpha+\beta)^{\text{te}}$ bzw. $(\alpha-\beta)^{\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar.[18]) Eine Funktion, die genau durch die 0^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist, ist modulo $\mathfrak{p}$ einer endlichen von Null verschiedenen Konstante kongruent. Ersetzen wir nun jede Funktion f von K, je nachdem sie durch eine positive, negative oder die nullte Potenz von $\mathfrak{p}$ genau teilbar ist, bzw. durch 0, ∞ oder die ihr modulo $\mathfrak{p}$ kongruente Konstante, so erhalten wir einen Punkt im oben definierten Sinne. Und so erzeugt jedes Primideal $\mathfrak{p}$ einen Punkt $\mathfrak{P}$ der absoluten *Riemann*schen Fläche von K. Alle diese Punkte haben die Eigenschaft, daß in ihnen das vorher ausgezeichnete Element von K den Wert ∞ *nicht* annimmt. Hat umgekehrt ein Punkt diese Eigenschaft, so bildet die Gesamtheit aller ganzen Funktionen von K, die in ihm verschwinden, ein Primideal, durch das umgekehrt dieser Punkt erzeugt wird. Nimmt

16) *D.-W.*, p. 206 ff.
17) *D.-W.*, p. 215—217.
18) *D.-W.*, p. 239—241.

aber z in einem Punkt den Wert ∞ an, so braucht man nur statt z ein anderes, in diesem Punkt nicht unendlich werdendes Element von K auszuzeichnen, etwa $\frac{1}{z}$, um dem Punkte ein Primideal zuordnen zu können.[19])

Unter einem *Polygon* wird ein symbolisch aufzufassendes Potenzprodukt aus gewissen Punkten

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}^r \mathfrak{P}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{P}_i^{r_i} \quad (r \geqq 0, r_1 \geqq 0, \cdots r_i \geqq 0)$$

verstanden.[20]) Polygone entsprechen ganzen Divisoren. Bildungen, die gebrochenen Divisoren entsprechen, verwenden *D.-W.* nicht. — Die Äquivalenz der Idealtheorie mit der Divisorentheorie wird durch den folgenden Satz dargetan: Wird in K ein nicht konstantes Element z ausgezeichnet, so bildet die Gesamtheit aller ganzen Funktionen aus K, die durch einen bestimmten ganzen Divisor (in dessen Punkten z nicht unendlich wird) teilbar sind, ein Ideal, und so erhält man alle Ideale in z. Zur Begründung der Idealtheorie für Funktionenkörper schlagen *D.-W.* einen ähnlichen Weg ein, wie *Dedekind* in seiner Begründung der Idealtheorie[21]), wobei sich jedoch die ganze Deduktion viel einfacher gestaltet. Die von *Kronecker*[22]) gegebene und später von *König*[23]) weiter ausgeführte Begründung der Idealtheorie bezieht sich von vornherein sowohl auf Zahlen- als auch auf Funktionenkörper. In einer späteren Darstellung verwendet *Weber*[24]), um zu der Punktdefinition zu kommen, eine Ausgestaltung der *Kronecker*schen Methode, die Theorie der *Fünktionale.* Einen verwandten Weg schlägt *Wellstein*[25]) ein.

Auch weitere zahlentheoretische Untersuchungen der Idealtheorie sind auf Funktionenkörper übertragen worden. *R. König* untersucht insbesondere die hyperelliptischen Funktionenkörper und wendet die Ergebnisse auf die Untersuchung der quadratischen Formen mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten an.[26]) *Rehfeld*[27]) beweist die Existenz einer Zahl, die der Klassenanzahl in der Idealtheorie analog

19) *D.-W.*, p. 239.

20) *D.-W.*, p. 241.

21) *Dirichlet-Dedekind*, Vorl. ü. Z., 4. Aufl. (1894), p. 493 ff.

22) *Kronecker*, Festschrift p. 48 ff.

23) *König*, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903, Teubner.

24) *Weber*, Lehrb. d. Algebra, Bd. III, p. 640 ff.

25) *Wellstein*, Jahresb. d. D. M.-V. 19 (1904), p. 112—116.

26) *R. König*, Wiener Monatshefte 23 (1912), p. 321—346; J. f. Math. 142 (1912), p. 191—210.

27) *Rehfeld*, Straßb. Diss. 1904.

ist. Wie aus dem *Riemann-Roch*schen Satz leicht folgt, ist diese Zahl das Geschlecht p des Körpers. Für die hyperelliptischen Körper s. *König*.[28]) *M. Lerch*[29]) gibt eine charakteristische Eigenschaft der Gattungen vom Geschlecht 0 an. [*O*]

11. Untersuchung der Funktionen des Körpers $K(u, z)$ in bezug auf ihre Teilbarkeit durch einen beliebigen Divisor. Die Grundlage für die ganze Theorie der algebraischen Funktionen bildet die vollständige Lösung der Frage nach allen Funktionen des Körpers, welche durch einen beliebig gegebenen Divisor $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{r_1}\mathfrak{P}_2^{r_2}\cdots\mathfrak{P}_\nu^{r_\nu}$ teilbar sind.

a) *Es sei zuerst $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}^r$, und $\mathfrak{P}$ entspreche einem n-blättrigen Verzweigungspunkte.*

In diesem einfachstem Falle, auf den sich alle anderen leicht reduzieren lassen, ist die Grundgleichung $f(u,z) = 0$ für den zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Bereich $K(\mathfrak{p})$ irreduktibel, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^n$ der zu $\mathfrak{P}$ zugeordnete rationale Divisor ist. Es sei π irgend eine Primfunktion für den Bereich von $\mathfrak{P}$ (etwa $\pi = (z - \alpha)^{\frac{1}{n}}$ bzw. $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$); dann können offenbar alle Multipla von $\mathfrak{P}^r$ für die Stelle $\mathfrak{P}$ auf eine einzige Weise homogen und linear durch die Basis:

$$(\pi^r, \pi^{r+1}, \ldots \pi^{r+n-1}) \tag{25}$$

mit *ganzen* Koeffizienten des Bereiches $K(\mathfrak{p})$ d. h. in der Form:

$$w = u_1\pi^r + u_2\pi^{r+1} + \cdots + u_n\pi^{r+n-1} \tag{25a}$$

dargestellt werden, deren Koeffizienten u_i rationalen Charakter für die Stelle $\mathfrak{p}$ haben und von nicht negativer Ordnung sind. Ein solches System heißt *ein Fundamentalsystem für den Divisor* $\mathfrak{P}^r$, und die Form w heißt für unbestimmte u *eine Fundamentalform für den Divisor* $\mathfrak{P}^r$, weil aus ihr durch Spezialisierung der Unbestimmten alle und nur die Multipla von $\mathfrak{P}^r$ erhalten werden. Die Gleichung n^{ten} Grades

$$G(w) = (w - w_1)(w - w_2)\ldots(w - w_n), \tag{25b}$$

deren Wurzeln die n konjugierten Fundamentalformen sind, heißt die *Fundamentalgleichung für* $\mathfrak{P}^r$, da sie alle und nur die Gleichungen ergibt, denen die Multipla von $\mathfrak{P}^r$ genügen, wenn man für $u_1, \ldots u_n$ alle ganzen Größen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ einsetzt. Ebenso ergibt die sog. *Diskriminante der Fundamentalgleichung* für $\mathfrak{P}^r$

$$\Delta^{(r)}(w) = \prod_{i>k}(w_i - w_k)^2 \tag{25c}$$

28) Sächs. Ber. 63 (1911), p. 360—361.

29) *M. Lerch*, Wiener Monatshefte 2 (19), p. 465—468.

bei denselben Spezialisierungen der Unbestimmten die Gleichungsdiskriminanten für alle Multipla von $\mathfrak{P}^r$. Das System (25) ist nicht das einzige Fundamentalsystem für die Multipla von $\mathfrak{P}^r$. Irgend ein anderes System $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ von Vielfachen des Divisors $\mathfrak{P}^r$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für denselben, wenn es aus dem obigen durch eine lineare Transformation:

$$U^{(i)} = \sum u_k^{(i)} \pi^{r+k-1} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n) \tag{26}$$

mit ganzen Koeffizienten $u_k^{(i)}$ hervorgeht, deren Determinante $| u_k^{(i)} |$ durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar ist.

Es sei nun $(U_k^{(1)}, U_k^{(2)}, \ldots U_k^{(n)})$ für $k = 1, 2, \ldots n$ das zu $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ gehörige System, welches aus den n^2 zu $\mathfrak{p}$ gehörigen konjugierten Entwicklungen besteht, und

$$d(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)}) = | U_k^{(1)}, \ldots U_k^{(n)} |^2 \tag{27}$$

die Diskriminante dieses Systems. Dann folgt aus dem soeben erwähnten Satze, daß die Diskriminanten aller Fundamentalsysteme durch dieselbe Potenz $\mathfrak{p}^D$ des zugehörigen rationalen Divisors teilbar sind, daß man also jenen Teiler nur für das besonders einfache System (25) zu bestimmen braucht.

Berechnet man nun die Diskriminante

$$| \pi_i^r, \pi_i^{r+1}, \ldots \pi_i^{r+n-1} |^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{28}$$

des Systems $(\pi^r, \pi^{r+1}, \ldots \pi^{r+n-1})$ unter der Voraussetzung $\pi_i = w^i (z-\alpha)^{\frac{1}{n}}$ $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, so ergibt sich leicht der Wert $(z-\alpha)^{2r+n-1}$. Also ist die in der Diskriminante irgend eines Fundamentalsystems für $\mathfrak{P}^r$ enthaltene Potenz $D_r(\mathfrak{P})$ von $\mathfrak{p}$

$$D_r(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^{2r+(n-1)} = n(\mathfrak{P}^r)^2\, n(\mathfrak{P}^{n-1}), \tag{29}$$

wo der erste Faktor nur von dem Exponenten r des Divisors, der zweite nur von der Natur des Körpers abhängt. Jedes andere System $(U^{(1)}, \ldots U^{(n)})$ von n Vielfachen von $\mathfrak{P}^r$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für diesen Divisor, wenn seine Diskriminante *genau* durch $D_r(\mathfrak{P})$ teilbar ist.

Ebenso leicht kann man die Potenz von $\mathfrak{p}$ bestimmen, welche für unbestimmte $u_1, u_2, \ldots u_n$ in der Diskriminante $\Delta^{(r)}(w)$ der Fundamentalgleichung enthalten ist. In der Tat kann man auch hier von der besonders einfachen Fundamentalform (25a) ausgehen. Berücksichtigt man dann, daß

$$\begin{aligned} \Delta^{(r)}(w) &= n(F'(w_1)) = n(\Pi(w_1 - w_k)) \\ &= n\big(\Pi(u_1 \pi^r (1 - w^{hr})) + u_2 \pi^{r+1} (1 - w^{(h+1)r}) + \ldots\big) \end{aligned} \tag{30}$$

ist, so ergibt sich ohne weiteres der Satz:

Die Diskriminante der Fundamentalgleichung für den Divisor $\mathfrak{P}^r$ ist für unbestimmte u_i genau durch

(31) $$\mathfrak{p}^{r(n-1)+((n,r)-1)}$$

teilbar, wenn (n, r) den größten gemeinsamen Teiler von n und r bedeutet.

Im Falle $r = 0$ handelt es sich um die Darstellung aller für den Bereich von $\mathfrak{P}$ ganzen algebraischen Funktionen. Hier ist die Diskriminante des Fundamentalsystems $\mathfrak{p}^{n-1}$, d. h. genau gleich dem Teiler der Diskriminante der Fundamentalgleichung.

b) Es sei $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{r_1}\mathfrak{P}_2^{r_2}\dots\mathfrak{P}_\nu^{r_\nu}$, und die Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_\nu$ gehören alle zu demselben rationalen Primteiler $\mathfrak{p}$.

Diese Untersuchung kann leicht auf die vorige zurückgeführt werden mit Hilfe des allgemeinen Satzes:

Man kann im Körper $K(u,\mathfrak{p})$ stets eine Funktion finden, welche an den zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Stellen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_\nu$ beliebig vorgegebene Entwicklungen besitzt.

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß dem Punkte $\mathfrak{p}$ drei bzw. a-, b- und c-blättrige Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ entsprechen, und es sei $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^r\mathfrak{P}_2^s\mathfrak{P}_3^t$. Es seien ferner $\pi^{(0)}$ und π zwei nach dem vorigen Satz bestimmte Funktionen, welche im Bereiche von $\mathfrak{P}_1$ bzw. gleich 1 und $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ sind, während sie in der Umgebung von $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ gleich Null sind. Es mögen ferner $\varrho^{(0)}$ und ϱ für $\mathfrak{P}_2$ und $\sigma^{(0)}$ und σ für $\mathfrak{P}_3$ bzw. die Werte 1, $(z-\alpha)^{\frac{1}{b}}$ und 1, $(z-\alpha)^{\frac{1}{c}}$ haben und für die beiden anderen Punkte Null sein. Dann erkennt man wieder unmittelbar, daß die $a + b + c = n$ Elemente:

(32) $$\pi^r, \pi^{r+1}, \dots, \pi^{r+a-1};\ \varrho^s, \varrho^{s+1}, \dots, \varrho^{s+b-1};\ \sigma^t, \sigma^{t+1}, \dots, \sigma^{t+c-1}$$

ein Fundamentalsystem für alle Multipla von $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^r\mathfrak{P}_2^s\mathfrak{P}_3^t$ innerhalb des Bereiches $K(u,\mathfrak{p})$ bilden, d. h. alle und nur diese Multipla sind eindeutig in der Form:

(32a) $$w = u_1\pi^r + \dots + u_a\pi^{r+a-1} + v_1\varrho^s + \dots + v_b\varrho^{s+b-1} + w_1\sigma^t + \dots + w_c\sigma^{t+c-1}$$

mit *ganzen* Koeffizienten des Körpers $K(\mathfrak{p})$ darstellbar. Die Diskriminante dieses Fundamentalsystems wird identisch gleich dem Produkte der drei Diskriminanten: $d(\pi^r, \pi^{r+1}, \dots, \pi^{r+a-1}) = \mathfrak{p}^{2r+(a-1)}, \dots,$ welche zu $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ gehören; es ergibt sich also sofort die Gleichung:

(32b) $$D(\mathfrak{Q}) = D(\mathfrak{P}_1^r)\, D(\mathfrak{P}_2^r)\, D(\mathfrak{P}_3^r) = n(\mathfrak{Q}^2)\, n\,(\mathfrak{P}_1^{a-1}\mathfrak{P}_2^{b-1}\mathfrak{P}_3^{c-1}).$$

Ein anderes System $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$, von Vielfachen von $\mathfrak{Q}$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{Q}$ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}$, wenn dasselbe *genau* durch $D(\mathfrak{Q})$ teilbar ist. Jedes rational unabhängige System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ des Körpers $K(u,z)$ kann durch eine endliche Anzahl von rationalen Elementartransformationen in ein Fundamentalsystem $(U^{(1)}, \ldots, U^{(n)})$ für $\mathfrak{Q}$ übergeführt werden; die Diskriminanten $d(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)})$ und $d(U^{(1)}, \ldots U^{(n)})$ unterscheiden sich dann *nur* um eine Potenz des zugehörigen Linearfaktors mit ganzzahligem Exponenten.

Die Untersuchung der einzelnen Differenzen, aus denen die Diskriminante der Fundamentalgleichung besteht, ergibt für diese den Teiler

$$\Delta_{\mathfrak{Q}}(w) = \mathfrak{p}^{\Sigma r(a-1) + ((n,a)-1) + 2\Sigma a b \cdot m\left(\frac{r}{a}, \frac{s}{b}\right)} \tag{33}$$

wo $m\left(\frac{r}{a}, \frac{s}{b}\right)$ jedesmal den kleineren der beiden Brüche $\frac{r}{a}$ und $\frac{s}{b}$ bezeichnet.

c) Die Ideale des Körpers $K(z,u)$ und die zugehörigen Fundamentalsysteme.

Es sei nun $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{r_1}\mathfrak{P}_2^{r_2}\ldots\mathfrak{P}_h^{r_h}$ ein beliebiger ganzer oder gebrochener Divisor, dessen zugehörige Punkte aber alle im Endlichen liegen. Dann bildet die Gesamtheit aller Elemente des Körpers, welche durch $\mathfrak{Q}$ teilbar und außerdem für alle *im Endlichen liegenden* Punkte regulär sind, einen Bereich $I(\mathfrak{Q})$, ein sog. *Ideal.*[30]) Sind $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ irgendwelche Elemente dieses Ideales, so gehört offenbar jede Funktion

$$U = u_1 U^{(1)} + u_2 U^{(2)} + \cdots + u_n U^{(n)} \tag{34}$$

ebenfalls zu $I(\mathfrak{Q})$, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ beliebige ganze rationale Funktionen von z sind. Sind in der Form (34) alle Elemente von $I(\mathfrak{Q})$ enthalten, so heißt $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ *ein Fundamentalsystem für dieses Ideal.* Ein System ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für $I(\mathfrak{Q})$, wenn ihm diese Eigenschaft für die Umgebung einer jeden im Endlichen liegenden Stelle $\mathfrak{p}$ zukommt. Hierdurch ist ein Mittel gegeben, um ein beliebiges rational unabhängiges System durch eine endliche Anzahl rationaler Transformationen in ein Fundamentalsystem $(U^{(1)}, \ldots U^{(n)})$ für ein beliebig gegebenes Ideal $I(\mathfrak{Q})$ umzuformen und außerdem mit Hilfe von (b) die Diskriminante dieses Fundamentalsystems zu bestimmen. Um dieses Resultat einfach schreiben zu können, bezeichnen wir durch:

$$\mathfrak{Z} = \Pi \mathfrak{P}_z^{a-1} \tag{35}$$

30) Vgl. *D.-W.*, p. 206 f. [*O*]

das über alle im Endlichen liegenden Punkte $\mathfrak{P}_a$ erstreckte Produkt, in welchem also nur die Verzweigungspunkte mit einem von Null verschiedenen Exponenten vorkommen. Dann ist jede Diskriminante $d(U^{(1)}, \ldots U^{(n)})$ des Ideales $I(\mathfrak{O})$ genau durch den Divisor

(36) $$n(\mathfrak{O}^2 \mathfrak{Z})$$

teilbar und enthält sonst keinen endlichen Divisor $\mathfrak{p}$. Entsprechen dem Punkte $\mathfrak{p}_\infty$ lauter reguläre Punkte, so ist der obige Divisor:

(37) $$\mathfrak{Z}_z = \Pi \mathfrak{P}_a^{a-1},$$

der sog. *Verzweigungsteiler von* $K(u,z)$ in Bezug auf die unabhängige Variable z, das über *alle* Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}_a$ erstreckte Produkt. Dann ergibt sich für die Diskriminante $D(\mathfrak{O}) = D(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ eines beliebigen Fundamentalsystems für $I(\mathfrak{O})$ die wichtige Darstellung

(38) $$D(\mathfrak{O}) = \frac{n(\mathfrak{O}^2 \mathfrak{Z}_z)}{\mathfrak{p}_\infty^{2q+w}},$$

wenn q die Ordnung von $\mathfrak{O}$, und

(38a) $$w = w_z = \sum (a-1)$$

die sog. *Verzweigungsordnung* die Ordnung des Verzweigungsteilers $\mathfrak{Z}_z$ ist.[31])

Ist speziell $\mathfrak{O} = 1$, also $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die sog. ganzen, d. h. *die* Funktionen des Körpers, welche im Endlichen überall endlich sind, so ist $D(1) = \frac{n(\mathfrak{Z}_z)}{\mathfrak{p}_\infty^{w}}$; da aber andererseits jedes Element $U_k^{(i)}$, also auch die Determinante $| U_k^{(i)} |$ in der Umgebung der *regulären* Punkte $\mathfrak{P}_i^{(\infty)}$ nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreitet, so besitzt $| U_k^{(i)} |^2$ in der Umgebung von $\mathfrak{p}_\infty$ eine gerade Ordnungszahl; also ergibt sich der Satz:

Für jeden algebraischen Körper $K(u,z)$ ist die Ordnungszahl $w_z = \sum (a-1)$ des Verzweigungsteilers stets eine gerade Zahl.[32])

31) Vgl. *D.-W.*, p. 223 f.; *H-L.*, p. 219—221. [*O*]

32) Ist $\mathfrak{O} = 1$, so entsteht das *Fundamentalsystem für ganze Größen* (*Kronecker*, Discr. 309) oder die *Basis* (*D.-W.*, p. 194) *des Körpers*. Mit der wirklichen Herstellung der Minimalbasis beschäftigen sich zahlreiche Untersuchungen (sowohl *Kronecker*, Discr. 309), als auch *D.-W.*, p. 193 geben nur Existenzbeweise). Die erste auf der allgemeinen Eliminationstheorie beruhende Methode ist von *Kronecker* in der Festschrift (§ 6, p. 16—19) angedeutet und später von *König* (s. Fußnote [25]), Allg. Th., p. 499—502) ausführlich dargestellt worden. In ihr wird das Problem auf Systeme linearer Gleichungen zurückgeführt mit Hilfe des Satzes, daß die Resolvente eines Gleichungssystems, dessen Lösungen eine lineare Schar bilden, linear sein muß. Ein direktes Verfahren zur Zurückführung des Problems

12. Die algebraischen Systeme und ihre Elementarteiler. Die Gesamtheit aller durch ein beliebiges rational unabhängiges System $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ mit *ganzen* Funktionen u_i von z als Koeffizienten, d. h. in der Form

$$U = u_1 U^{(1)} + u_2 U^{(2)} + \cdots + u_n U^{(n)} \tag{39}$$

darstellbaren Funktionen des Körpers $K(u, z)$ bildet einen Teilbe-

auf lineare Gleichungen gibt *Hensel* (J. f. Math. 109, 1892), in korrigierter Form (J. f. Math. 111, 1893), *Mertens* (Wiener Ber. 102 II_3, 1893), *Hensel* (Acta Math. 18, 1894) — die in der letzten Arbeit gegebene Methode stellt etwas modifiziert und mit Beispielen *Baker* (*B.* p. 105—112) dar. — *König*[23]) (p. 514—526). Die letzte Methode führt zu solchen Funktionen des Fundamentalsystems, die rational *mit rationalen Koeffizienten* durch x, u ausdrückbar sind, falls die Zahlenkoeffizienten der Grundgleichung rational sind. — Die Methoden von *Hensel* (Act. Math. 18) lösen das Problem unter Benutzung der *Formen*, wobei sich das sog. *absolute Fundamentalsystem* ergibt, bei dem auch der unendlich ferne Punkt nicht ausgezeichnet ist. Die Methoden von *Hensel* und *Mertens* beruhen auf der von *Hensel* gegebenen „rationalen" Definition der Teilbarkeit durch gebrochene Potenzen einer Primfunktion. Durch direkte Einführung gebrochener Potenzen rationaler Funktionen (Wurzelfunktionen) gelangt *Laut* (Dissert. Tübingen 1913) zu einer einfachen Lösung des Problems. Später hat *Hensel* [J. f. Math. 115 (1895), Berl Ber. (1895) p. 933] Fundamentalsysteme in bezug auf den Primteiler $x - a$ eingeführt. Unter Benutzung solcher besonderer Fundamentalsysteme hat dann *Landsberg* [Gött. Nachr. 1895, Math. Ann. 50 (1899) p. 336—350] Methoden für die Konstruktion absoluter Fundamentalsysteme abgeleitet In der ersten dieser Abhandlungen wird die Irreduzibilität der Grundgleichung nicht vorausgesetzt, und das erhaltene Fundamentalsystem ergibt dann ein einfaches Kriterium für die Irreduzibilität der Grundgleichung. Die Methode der zweiten Arbeit beruht nur auf den Reihenentwicklungen.

Allgemeiner wird die Konstruktion des Fundamentalsystems für ein beliebiges Ideal, worin die Konstruktion einer Minimalbasis als spezieller Fall enthalten ist, mit Hilfe der Reihenentwicklungen bei *H.-L.* p. 215 ausgeführt (1902), desgleichen bei *G. Dumas*, Thèse (Paris 1904), p. 68—71.

Endlich sei noch das Buch von *H. Stahl*, Abriß einer Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Leipzig 1911, erwähnt, wo im § 10 ein allgemeiner Ausdruck für ganze Funktionen (unter gewissen Voraussetzungen über die Singularitäten der Grundkurve) gegeben und im § 14 zur Aufstellung der Minimalbasis angewandt wird. Zur Aufstellung der Minimalbasis kann auch die *Thomé*sche Methode der Singularitätenauflösung ([58]) angewandt werden.

Einige spezielle Körper betrachtet *Baur* (J. f. Math. 116, 1896) hyperelliptische Körper [Math. Ann. 41 (1893), p. 491], kubische Körper [ebd. 43 (1893), p. 505], *K. Fischer* (Dissert. Berlin, J. f. Math. 117, 1896) gibt allgemeine Methoden für kubische und biquadratische Körper in Anlehnung an die ersten Arbeiten von *Hensel*.

Den Aufbau einer Fundamentalbasis untersucht *Baker* (Proc. Lond. M. S. 26 (1895), *B.* 47—57) mit Hilfe des *Riemann-Roch*schen Satzes. *Klein* (R. F. I, p. 122—129) bespricht die Zusammensetzung eines absoluten Fundamentalsystems. Vgl. endlich noch *Weierstraß*, V. 1873; *B.-N.*, p. 433. [*O*]

reich desselben, welcher ein *Modul* genannt wird.[33]) Jenes System $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)})$ heißt eine *Basis des Moduls*. Jedes Ideal ist ein spezieller Modul.

Zwei Systeme $(U^{(i)})$ und $(V^{(i)})$ heißen *äquivalent*, wenn sie Basen desselben Moduls sind, wenn sie also durch eine umkehrbare lineare Transformation mit *ganzen* rationalen Koeffizienten ineinander übergeführt werden können. Bildet man die zu einer Basis gehörige algebraische Matrix $(U_k^{(1)}, U_k^{(2)}, \ldots U_k^{(n)})$ und sucht nach den Vorschriften der Determinantentheorie ihre sog. *Determinantenteiler*, d. h. die größten gemeinsamen Teiler $d_1(z)$, $d_2(z)$, $\ldots$ $d_n(z)$ ihrer Unterdeterminanten erster, zweiter, $\ldots$ n^{ter} Ordnung und aus ihnen die sog. *Elementarteiler*:

$$e_1(z) = d_1(z),\ e_2(z) = \frac{d_2(z)}{d_1(z)}, \ldots e_n(z) = \frac{d_n(z)}{d_{n-1}(z)}, \tag{40}$$

so sind dies Produkte von Potenzen der rationalen Divisoren $\mathfrak{p}$ mit ganzen oder gebrochenen Exponenten, und aus der Definition äquivalenter Systeme folgt sofort der Satz:

Äquivalente Systeme besitzen dieselben Elementarteiler.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein im Endlichen liegender Punkt der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$, zu welchem auf der n-blättrigen Fläche $\mathfrak{K}_z$ die Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \ldots \mathfrak{P}_c$ von $a, b, \ldots c$ Blättern gehören. Sind dann $\mathfrak{p}^{\varepsilon_1}, \mathfrak{p}^{\varepsilon_2}, \ldots \mathfrak{p}^{\varepsilon_n}$ die in den Elementarteilern $e_1(z), e_2(z), \ldots e_n(z)$ enthaltenen Potenzen von $\mathfrak{p}$, so sind die Exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ rationale Brüche, deren kleinste positive Reste, abgesehen von der Reihenfolge, die Bruchsequenzen:

$$\left(0, \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots \frac{a-1}{a};\ 0, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \ldots \frac{b-1}{b};\ \ldots 0, \frac{1}{c}, \frac{2}{c}, \ldots \frac{c-1}{c}\right)$$

bilden. Mit Benutzung dieser Tatsache kann man mit Hilfe eines beliebigen algebraischen Systems, z. B. von $(1, u_i, u_i^2, \ldots u_i^{n-1})$ die Verzweigung der zugehörigen *Riemann*schen Fläche aus dem Koeffizienten der Grundgleichung direkt finden.[34]) So ergibt sich z. B. der Satz:

Besitzen in der allgemeinen kubischen Gleichung:

$$u^3 + a(z)\,u + b(z) = 0$$

die rationalen Funktionen $a(z)$, $b(z)$, $\Delta(z) = 4a^3 + 27b^2$ für eine endliche oder die unendlich ferne Stelle $\mathfrak{p}(z = \alpha$, bzw. $z = \infty)$ die Ordnungszahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, so wird die Verzweigung im Punkte $\mathfrak{p}$ durch

33) Eingehendere Untersuchung der Funktionsmoduln geben *D.-W.* 194—206. Die Determinanten- und Elementarteiler der den Moduln zugehörigen Basissysteme werden jedoch erst von *Hensel* herangezogen, J. f. Math 115, p. 254 ff. [*O*]

34) *Hensel*, Berlin Sitzber. 1895, p. 993; *Hensel*, ebd. p. 1103; *H.-L.*, p. 188 ff. [*O*]

den Nenner des kleineren unter den Brüchen $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{3}$ so bestimmt, daß er angibt, wie viele unter den drei Blättern dort zusammenhängen. Ist aber $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$, so wird dieselbe Frage durch den Nenner von $\frac{b}{2}$ entschieden.[35])

Jedes System $(U^{(1)}, U^{(2)} \ldots U^{(n)})$ kann durch eine endliche Anzahl von rationalen Elementartransformationen in ein äquivalentes $(V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots V^{(n)})$ übergeführt werden, dessen n Elemente durch möglichst hohe Potenzen eines beliebig gegebenen rationalen Divisors $\mathfrak{p}$ algebraisch teilbar sind, und zwar sind dies diejenigen n Potenzen $\mathfrak{p}^{\varepsilon_1}, \mathfrak{p}^{\varepsilon_2}, \ldots \mathfrak{p}^{\varepsilon_n}$, welche in den Elementarteilern des algebraischen Systems $(U_i^{(1)}, U_i^{(2)}, \ldots U_i^{(n)})$ enthalten sind. Ein solches System $(V^{(i)})$ heißt *normal in bezug auf die Stelle* $\mathfrak{p}$. Die Determinanten $|U_k^{(i)}| = |V_k^{(i)}|$ sind genau durch $\mathfrak{p}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_n}$ teilbar.[36])

Dieses Resultat benutzen wir zur Lösung der folgenden Fundamentalaufgabe für die Theorie und die Anwendung der algebraischen Funktionen:

Es sollen alle linear unabhängigen Multipla eines beliebig gegebenen ganzen oder gebrochenen Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb des Körpers $K(u,z)$ gefunden werden.

---

35) *Hensel*, Berlin Sitzber. 1895, p. 1103; für dreiblättrige Flächen vgl. *Baur*, Math. Ann. 46 (1895), p. 31—61; J. f. Math. 119 (1898), p. 171—174. Ein ähnlicher einfacher Satz besteht für die Verzweigung der allgemeinen vierblättrigen Kugelfläche. *Hensel*, ebd. [*O*]

36) Der Begriff einer *Normalbasis*, d. h. einer Minimalbasis, die in bezug auf den unendlich fernen Punkt normal ist, wird bei *D.-W.* (p. 255—258) auf eine andere Weise mit einem Existenzbeweis eingeführt. Die Konstruktion einer solchen gibt *Mertens* (Wien. Sitzber. 1893, 2a, p. 437), ein kürzeres Verfahren mit denselben Hilfsmitteln *Laut* (Dissert. Tübingen 1913). Alle übrigen in der Fußnote 32) erwähnten Arbeiten, die sich mit der Konstruktion eines *absoluten Fundamentalsystems* für *ganze Formen* beschäftigen, ergeben zugleich auch Normalbasen [*Baur*, Math. Ann. 49 (1897), p. 73—82], wenn in den Formen der absoluten Fundamentalsysteme eine der Variablen gleich 1 gesetzt wird. Dazu ist auch *Hensel* [J. f. Math. 115 (1895), p. 254—294] zu vergleichen.

Die im Text gegebene Definition der normalen Systeme kommt zuerst bei *Hensel* (J. f. Math. 105, p. 334) vor. In einigen späteren Abhandlungen von *Hensel* (J. f. Math 115, 117) und *Fischer* (J. f. Math. 117) wird die Bezeichnung *kanonisch* gebraucht. Für die Transformation eines Systems in ein in bezug auf eine endliche oder unendlich ferne Stelle kanonisches gibt *Hensel* [J. f. Math. 115 (1895), p. 254—294] rationale Methoden. Zu vergleichen ist auch *H.-L.*, p. 169—173. Jedes System ist einem solchen äquivalent, welches in bezug auf alle *endlichen* Stellen normal ist [*Hensel*, J. f. Math. 117 (1895), p. 129—139]; für die Körper 3. und 4. Grades ist die Transformation vollständig durchgeführt bei *L. Fischer* [Dissert. Berlin oder J. f. Math. 117 (1895), p. 1—23]. [*O*]

Es werde angenommen, was eventuell durch eine Transformation $z' = \frac{1}{z-\alpha}$ leicht erreicht werden kann, daß der unendlich fernen Stelle keine Verzweigungspunkte entsprechen, und daß $\mathfrak{Q}$ keinen der n Primteiler $\mathfrak{P}_i^{(\infty)}$ enthält. Dann sei $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für das Ideal $I(\mathfrak{Q})$, welches in bezug auf die Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ normal ist. Es mögen nun:

$$\mathfrak{p}_\infty^{r_1}, \mathfrak{p}_\infty^{r_2}, \ldots \mathfrak{p}_\infty^{r_n}$$

die in den algebraischen Funktionen $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)}$ enthaltenen Potenzen von $\mathfrak{p}_\infty$ sein, und diese seien so geordnet, daß $r_1 \geqq r_2 \geqq \ldots \geqq r_n$ ist. Ist dann r_s der letzte nichtnegative unter diesen Exponenten, so sind nur diese ersten Funktionen $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(s)}$ wirklich Vielfache von $\mathfrak{Q}$, die $n - s$ letzten sind es nicht, da diese noch außerdem die Primteiler $\mathfrak{P}_i^{(\infty)}$ mindestens einmal im Nenner haben. Allgemeiner ist eine Funktion:

$$U = u_1 U^{(1)} + u_2 U^{(2)} + \cdots + u_s U^{(s)}$$

dann und nur dann ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn allgemein u_i eine beliebig ganze Funktion des r_i^{ten} Grades von z ist.

Unter den soeben gemachten Voraussetzungen bilden also die:

$$N = (r_1 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + (r_s + 1) \tag{41}$$

algebraischen Funktionen:

$$U^{(i)}, z U^{(i)}, \ldots z^{r_i} U^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla des Divisors $\mathfrak{Q}$.[37])

Zu jedem rational unabhängigen Systeme $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ gehört ein anderes, das sog. *komplementäre System* $(\breve{U}^{(1)}, \breve{U}^{(2)}, \ldots \breve{U}^{(n)})$, dessen Elemente demselben Körper $K(u, z)$ angehören[38]) Dasselbe ist dadurch charakterisiert, daß die beiden dazugehörigen Matrizen $(U_k^{(1)}, U_k^{(2)}, \ldots U_k^{(n)})$ und $(\breve{U}_k^{(1)}, \breve{U}_k^{(2)}, \ldots \breve{U}_k^{(n)})$ reziproke Systeme werden, wenn in einem von ihnen Zeilen und Kolonnen vertauscht werden. Aus diesem Zusammenhang ergeben sich sofort die wichtigsten zwischen zwei komplementären Systemen bestehenden Beziehungen: Ist das System $(U^{(i)})$ für eine Stelle $\mathfrak{p}$ normal und sind $\mathfrak{p}^{s_1}, \ldots \mathfrak{p}^{s_n}$ die in

37) S. *H.-L.*, p. 223; *G. Dumas,* Thèse, p. 71—72. „Die Frage der Aufstellung aller Multipla eines gegebenen Divisors innerhalb eines Körpers bildet den Kernpunkt aller algebraischen Theorien" (*B.-N.*, p. 410). In der *Weierstraß*schen Vorlesung von 1869 (*B.-N.*, p. 410—414) wird diese Frage unter Benutzung der *Kronecker*schen Fundamentalsysteme für ganze Größen des Körpers behandelt. [*O*]

38) *D.-W.*, p. 217—223; *Hensel,* J. f. Math. 117 (1896), p. 33. [*O*]

den einzelnen Elementen enthaltenen Potenzen von $\mathfrak{p}$, so ist auch das komplementäre System für $\mathfrak{p}$ normal, und seine Elemente enthalten die Potenzen $\mathfrak{p}^{-\varepsilon_1}, \mathfrak{p}^{-\varepsilon_2}, \ldots \mathfrak{p}^{-\varepsilon_n}$. Hieraus folgt sofort der Satz: Die Elementarteiler des komplementären Systems sind gleich den reziproken Elementarteilern des ursprünglichen in umgekehrter Reihenfolge.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Frage, unter welcher Bedingung ein System $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für ein Ideal $I(\mathfrak{Q})$ ist, und welches in diesem Falle der zugehörige Divisor $\mathfrak{Q}$ ist. Diese Frage wird vollständig durch die folgenden beiden Sätze beantwortet:

1. Ein algebraisches System $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für ein Ideal, wenn seine Diskriminante genau gleich $\frac{n(\mathfrak{Q}^2\mathfrak{Z})}{\mathfrak{p}_\infty^{2q+n}}$ ist, wenn $\mathfrak{Q} = (U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots U^{(n)})$ den größten gemeinsamen Teiler der n Elemente $U^{(i)}$ bedeutet, und zwar ist alsdann der zum Ideale gehörige Divisor gleich $\mathfrak{Q}$.

2. Ein algebraisches System ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für ein Ideal, wenn es für jede endliche Stelle $\mathfrak{p}$ einem anderen äquivalent ist, welches entsprechend den an jener Stelle übereinanderliegenden Verzweigungspunkten $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \ldots \mathfrak{P}_c$ in lauter Fundamentalsysteme $(\pi^r, \ldots \pi^{r+a-1}; \varrho^s, \ldots \varrho^{s+b-1}; \ldots; \sigma^t, \ldots \sigma^{t+c-1})$ zerfällt. Ist dies der Fall, so ist der zugehörige Divisor $\mathfrak{Q} = \Pi\mathfrak{P}_a^r$, wo das Produkt nur über diejenigen Primfaktoren $\mathfrak{P}_a, \ldots$ erstreckt zu werden braucht, für welche die bezüglichen Exponenten $r, \ldots$ von Null verschieden sind.[39])

Aus diesen beiden Sätzen erschließt man unmittelbar das folgende wichtige Theorem:

Ist $(U^{(1)} \ldots U^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für einen Divisor $\mathfrak{Q}$, so ist auch das komplementäre System $(\breve{U}^{(1)}, \ldots \breve{U}^{(n)})$ ein Fundamentalsystem und zwar für den *zu* $\mathfrak{Q}$ *komplementären Divisor* $\breve{\mathfrak{Q}}$, welcher mit $\mathfrak{Q}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q}\breve{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_0} \tag{42}$$

zusammenhängt; hier bedeutet wieder $\mathfrak{Z}_0$ den Verzweigungsteiler $\Pi\mathfrak{P}_a^{a-1}$ für alle endlichen Verzweigungspunkte.[40])

---

39) *H.-L.*, p. 218; derartige Bedingungen für Minimalbasen zuerst bei *Hensel*, J. f. Math. 115, p. 267, für Normalbasen in homogener Form, ebd. p. 287. Eine ähnliche Charakterisierung des Fundamentalsystems für Integrale 1. Gattung gibt ebenfalls in homogener Form *Hensel*, J. f. Math. 117, p. 37. [*O*]

40) *H.-L.*, p. 231. Ein entsprechendes Resultat, jedoch spezieller (für Fundamentalbasen des Körpers) bei *D.-W.*, p. 227. [*O*]

13. Die eindeutigen Transformationen des Körpers $K(u,z)$ in den ihm gleichen $K(y,x)$ bei beliebiger Annahme der unabhängigen Variablen x.[41])

Ist x eine beliebige nichtkonstante Funktion des Körpers $K(u,z)$, so kann man stets durch ein endliches rationales Verfahren ein anderes Element desselben Körpers so auswählen, daß alle Elemente des Körpers $K(u,z)$ auch rationale Funktionen von x und y sind, daß also $K(u,z) = K(y,x)$ ist.

Ist n_x der Grad von x, so kann und muß man nämlich y innerhalb $K(u,z)$ so auswählen, daß y einer *irreduktiblen* Gleichung des n_x^{ten} Grades mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten genügt. Der so transformierte Körper $K(y,x)$ ist also stets von dem Grade n_x der beliebig gewählten unabhängigen Veränderlichen, und die neue Grundgleichung:

$$F(\overset{n_x}{y}, \overset{n_y}{x}) = 0 \tag{43}$$

ist in bezug auf x und y bzw. vom Grade n_y und n_x. Jede Größe des Körpers genügt dann einer irreduktiblen Gleichung mit rationalen Koeffizienten in x, deren Grad gleich n_x oder gleich einem Teiler von n_x ist. Zwischen zwei beliebigen Elementen ξ und η des Körpers $K(u,z)$ besteht immer eine irreduktible Gleichung $F(\xi,\eta) = 0$, deren Grade in ξ und η bzw. gleich n_η und n_ξ oder einem Teiler dieser Zahlen sind. Der aus ihnen gebildete Körper $K(\eta,\xi)$ ist dann und nur dann gleich $K(u,z)$, wenn jene beiden Gradzahlen ihren größten Wert haben. Aus diesem Resultat folgt sofort der allgemeine Satz, der die Grundlage der Theorie der algebraischen Kurven bildet:

Ist

$$x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_3}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_3}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_3}$$

die Divisorendarstellung von drei beliebigen nichtkonstanten Elementen des Körpers $K(u,z)$, so besteht zwischen ihnen stets eine homogene Gleichung

$$F(\overset{n_0}{x_0}, \overset{n_1}{x_1}, \overset{n_2}{x_2}) = 0, \tag{43a}$$

deren Grad n gleich dem Grade der von ihrem größten gemeinsamen Teiler befreiten Zählerdivisoren $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ ist; diese Gleichung ist in bezug auf x_0 von dem Grade n_0 der Funktion $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}$, und das Entsprechende gilt von den Graden n_1 und n_2 für x_1 und x_2.

41) *D.-W.*, p. 232—235. Über die Beziehungen zum *Riemann*schen Klassenbegriff vgl. II B 2, Nr. 9—10. [*O*]

Jede nicht konstante Größe x des Körpers kann als unabhängige Variable für den Körper gewählt werden, und zu jeder gehört eine n_x-blättrige *Riemann*sche Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$, auf welcher nun alle und nur die Funktionen des Körpers eindeutig und bis auf ihre Pole auch stetig ausgebreitet sind. Da die einzelnen Punkte $\mathfrak{P}$ und ihre Umgebungen unabhängig von der Wahl der Kugelfläche definiert sind, so folgt, daß je zwei solche zu demselben Körper gehörigen Kugelflächen in der Weise eindeutig umkehrbar aufeinander bezogen sind, daß die Umgebungen entsprechender Punkte einander eindeutig zugeordnet sind. Hieraus folgt weiter, daß die algebraischen Divisoren und die Gesetze ihrer Teilbarkeit, ferner die Definition der ganzen und der gebrochenen Divisoren usw. in bezug auf den Körper invariant sind, dagegen sind z. B. die Begriffe des Moduls, des Ideales, des Verzweigungsteilers u. a. m. von der Wahl der unabhängigen Variablen z, d. h. von der *Riemann*schen Fläche $\mathfrak{K}_z$, abhängig. Speziell ist der zur unabhängigen Variablen x gehörige Verzweigungsteiler gleich $\mathfrak{Z}_x = \prod \mathfrak{P}_b^{\nu-1}$, wenn das Produkt auf alle Verzweigungspunkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ ausgedehnt wird.

Existiert in dem Körper $K(u, z)$ speziell ein Element $\xi = c\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'}$ vom ersten Grade und wählt man dieses als unabhängige Variable, so werden alle anderen Elemente η dieses Körpers rationale Funktionen von ξ; der algebraische Körper $K(u, z)$ ist dann gleich dem rationalen Körper $K(\xi)$. Alle Kugelflächen $\mathfrak{K}_x$ des Körpers sind dann eindeutig auf die zu ξ gehörige einblättrige Kugelfläche $\mathfrak{K}_\xi$ abgebildet.

14. Die Einteilung der algebraischen Divisoren in Klassen. Wie in Nr. 3 rechnen wir in dem algebraischen Körper $K(u, z)$ alle auch ihren multiplikativen Konstanten nach bestimmten Divisoren $U = \mathfrak{Q}_U$ in eine Klasse E oder (1), die sogenannte *Haupt- oder Einheitsklasse*, welche einem Elemente U des Körpers gleich sind. Es ist also

$$E = (1) = (U, U', U'', \ldots). \tag{44}$$

Diese Klasse enthält somit unendlich viele, nämlich so viele Divisoren, als es Elemente $U, U', \ldots$ des Körpers gibt. Alle Divisoren der Hauptklasse haben hiernach die Ordnung Null, und sie erzeugen sich durch die elementaren Rechenoperationen wieder. Jedoch gehört hier im allgemeinen nicht jeder Divisor der Ordnung Null zur Hauptklasse; dies ist vielmehr dann und nur dann der Fall, wenn der algebraische Körper $K(u, z)$ einem rationalen Körper $K(\xi)$ gleich ist oder, was dasselbe ist, wenn wenigstens ein Quotient $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'}$ zweier Primteiler der Hauptklasse angehört.

Allgemeiner nennen wir zwei Divisoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ *äquivalent* und rechnen sie in *eine und dieselbe Klasse* Q, wenn ihr Quotient $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}'} = \mathfrak{D}_U$ eine Größe U des Körpers oder ein Divisor $\mathfrak{D}_U$ der Hauptklasse E ist. Man erhält also alle und nur die Divisoren einer Klasse Q, wenn man alle Elemente $(U, U', \ldots)$ des Körpers mit einem beliebig ausgewählten Divisor $\mathfrak{D}_0$ der Klasse Q, dem sogenannten *Multiplikator* für diese Klasse multipliziert, d. h. es ist

$$Q = \mathfrak{D}_0(U, U', \ldots) = (\mathfrak{D}_0 U, \mathfrak{D}_0 U', \ldots). \tag{45}$$

Alle Divisoren der Klasse Q haben somit dieselbe Ordnung q, welche daher die *Ordnung jener Klasse* genannt wird. Man kann den Multiplikator $\mathfrak{D}_0$ innerhalb Q ganz beliebig und speziell auch stets so auswählen, daß er beliebig gegebene Primfaktoren nicht enthält.

Sind Q und R zwei Divisorenklassen, und durchlaufen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{R}$ alle Elemente derselben, so gehören alle Produkte $\mathfrak{D}\mathfrak{R}$ und nur sie in eine und dieselbe neue Klasse, welche durch QR bezeichnet wird, und ebenso sind alle Quotienten $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{R}}$ die sämtlichen Divisoren einer Klasse $\frac{Q}{R}$. Sind q und r die Ordnungen von Q und R, so haben QR und $\frac{Q}{R}$ die Ordnungszahlen $q + r$ und $q - r$. Die Haupt- oder Einheitsklasse E ist die einzige, durch deren Multiplikation und Division eine beliebige Klasse Q nicht geändert wird.[42])

Zu einer wesentlich allgemeineren Auffassung der Äquivalenz und der Klasseneinteilung der algebraischen Divisoren, welche für die geometrischen Anwendungen der Theorie von großer Bedeutung ist, gelangt man durch die folgenden Betrachtungen:

Alle Divisoren $\mathfrak{D}$ bilden eine Gruppe, welche kommutativ, also eine *Abel*sche Gruppe G ist, und dasselbe gilt für jede Untergruppe von G, z. B. für die Gesamtheit aller der soeben bestimmten Divisorenklassen. Es sei nun

$$M = (\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots)$$

eine beliebige Untergruppe von G, so sollen zwei Divisoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ jetzt in allgemeinerem Sinne *äquivalent in bezug auf* M heißen,

---

42) *D.-W.*, p. 248—250 (§ 18), *H.-L.*, p. 250 f.; bei der Vergleichung der Resultate ist jedoch zu beachten, daß bei *D.-W.* Polygone nur *ganzen* Divisoren entsprechen, so daß zu den dort betrachteten Polygonklassen Divisorenklassen gehören, in denen wenigstens ein *ganzer* Divisor vorkommt. Ähnliches gilt von den *Polygonscharen*. Dementsprechend gestalten sich die obigen Sätze bei *D.-W.* komplizierter. [*O*]

wenn sie sich nur um ein Element von M unterscheiden, so daß also die Aquivalenz

$$\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}' \ (M)$$

eine Gleichung $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'\mathfrak{M}$ vertritt. Bei dieser allgemeineren Definition ordnen sich alle untereinander in bezug auf M äquivalenten Divisoren zu Klassen $(E_M, Q_M, R_M, \ldots)$, und auch für diese Klasseneinteilung gelten genau die früheren Gesetze. Die Hauptklasse E_M ist hier die Gruppe M, und auch hier bestimmt das Produkt je zweier Elemente von zwei Klassen Q_M und R_M alle Elemente einer neuen Klasse, welche jetzt mit $Q_M R_M$ bezeichnet werden möge. Ebenso gehört zu jeder Klasse Q_M eine reziproke Klasse Q_M^{-1}, welche mit ihr multipliziert die Hauptklasse M erzeugt.

Wählt man für M speziell die Klasse E der zu den Funktionen U von $K(u, z)$ gehörigen Divisoren $\mathfrak{Q}_U$, so erhält man genau die vorige Klasseneinteilung, die wir auch im folgenden zunächst immer benutzen werden. Es sei nun aber A irgendeine dieser Divisorenklassen, und es bedeute jetzt

$$M = (\ldots A^{-2}, A^{-1}, E, A, A^2, \ldots)$$

die durch diese Klasse und ihre Potenzen konstituierte Untergruppe von G, welche also ihrerseits die Klasse E als Teiler enthält. Dann entspricht der Einteilung der Divisoren $\mathfrak{Q}$ in bezug auf M die Zusammenfassung aller der früheren Divisorenklassen Q in eine größere Klasse Q_M, welche sich von Q nur um eine Potenz von A unterscheiden.

15. Die Divisorenscharen und ihre Invarianten.[43]) Sind $\mathfrak{Q}_{U_1}$, $\mathfrak{Q}_{U_2}, \ldots, \mathfrak{Q}_{U_\mu}$ μ beliebige Divisoren der Hauptklasse, $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ beliebige Konstanten, so ist

$$\mathfrak{Q}_U = c_1 \mathfrak{Q}_{U_1} + c_2 \mathfrak{Q}_{U_2} + \cdots + c_\mu \mathfrak{Q}_{U_\mu} \tag{46}$$

ebenfalls ein eindeutig bestimmter Divisor der Hauptklasse, nämlich derjenige, welcher der Funktion

$$U = c_1 U_1 + c_2 U_2 + \cdots + c_\mu U_\mu \tag{46a}$$

entspricht. Derselbe ist durch den größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_{U_1}, \mathfrak{Q}_{U_2}, \ldots, \mathfrak{Q}_{U_\mu})$ der $\mathfrak{Q}_{U_i}$ ebenfalls teilbar, also in der Form $\mathfrak{Q}_U = \mathfrak{D}\mathfrak{G}$ darstellbar, wo der ganze Divisor $\mathfrak{G}$ von den Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ abhängt. Man kann die Konstanten c_i auf unendlich viele Arten so bestimmen, daß $\mathfrak{G}$ beliebig gegebene Primteiler $\mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{P}^{(r)}$ nicht enthält. μ Divisoren der Hauptklasse heißen

43) Vgl. *D.-W.*, p. 250—252 (§ 19), wo jedoch nur Polygonscharen, d. h. Scharen *ganzer* Divisoren betrachtet werden (für die hier gegebenen Betrachtungen vgl. *H.-L.*, p. 452f.). [*O*]

linear unabhängig, wenn zwischen ihnen keine lineare homogene Gleichung:

$$c_1\mathfrak{D}_{U_1} + c_2\mathfrak{D}_{U_2} + \cdots + c_\mu\mathfrak{D}_{U_\mu} = 0$$

mit konstanten Koeffizienten besteht.

Wenn wir festsetzen, daß eine zwischen Divisoren bestehende Gleichung richtig bleiben soll, wenn man sie mit einem von Null verschiedenen Divisor multipliziert oder durch ihn dividiert, so erkennt man, daß jede homogene Gleichung vom ersten oder auch von höherem Grade zwischen Divisoren der Hauptklasse für die ihnen in einer beliebigen Klasse Q zugeordneten Divisoren ebenfalls erfüllt ist, und umgekehrt besteht zwischen Divisoren einer und derselben Klasse dann und nur dann eine homogene Gleichung, wenn sie auch für die zugeordneten Funktionen der Hauptklasse erfüllt ist. Sind speziell $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_\mu$ beliebige Divisoren einer Klasse Q, so stellt jede homogene lineare Funktion:

$$\mathfrak{D} = c_0\mathfrak{D}_0 + c_1\mathfrak{D}_1 + \cdots + c_\mu\mathfrak{D}_\mu$$

einen eindeutig bestimmten Divisor derselben Klasse dar, welcher in der Form $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$ geschrieben werden kann, wo $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_\mu)$ ist und $\mathfrak{G}$ einen von den c_i abhängigen ganzen Divisor bedeutet. Die Divisoren $(\ldots\mathfrak{D}_i\ldots)$ heißen *linear unabhängig*, wenn zwischen ihnen keine homogene lineare Gleichung mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten besteht. Man kann jedes System $(\mathfrak{D}_i)$ durch ein System unabhängiger Divisoren ersetzen.

Für alle möglichen Werte der Konstanten c_i erhält man alle Divisoren $\mathfrak{D}$ einer *Divisorenschar* $\mathfrak{S}$, welche durch die *Basis* $(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_\mu)$ von linear unabhängigen Elementen vollständig bestimmt ist. Diese Schar bleibt ungeändert, wenn man ihre Basis durch eine umkehrbare lineare Transformation

$$\mathfrak{D}_i = \sum c_{ik}\mathfrak{D}_k' \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, \mu)$$

mit konstanten Koeffizienten in eine *äquivalente Basis* transformiert. Diese Tatsache liefert gleich die zu einer solchen Schar gehörigen $(\mu + 1)$ invarianten *Verzweigungsteiler*, welche in allen Anwendungen dieser Theorie von grundlegender Bedeutung sind.

Man kann nämlich die Basis $(\mathfrak{D}_i)$ von vornherein in eine äquivalente Basis $(\overline{\mathfrak{D}}_i)$ transformieren, welche für eine beliebig gegebene Stelle $\mathfrak{P}$ *regulär* ist, in welcher nämlich jedes folgende Element durch eine höhere Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar ist, als das vorhergehende. Sind nun

$$\mathfrak{P}^{\alpha_0},\ \mathfrak{P}^{\alpha_0+\alpha_1},\ \ldots,\ \mathfrak{P}^{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_s} \tag{47}$$

die in $\overline{\mathfrak{D}}_0, \overline{\mathfrak{D}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{D}}_s$ enthaltenen Potenzen von $\mathfrak{P}$, so sind die Exponenten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ nur von dem Systeme $(\mathfrak{D}_i)$ abhängige ein-

deutig bestimmte ganze Zahlen, von denen die μ letzten sämtlich positiv sind, während α_0 positiv, Null oder negativ sein kann. Für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ erhält man so ein System von Exponenten $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$, welches der Schar $\mathfrak{S} = (\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_s)$ zugeordnet ist. Wir bezeichnen nun die über alle Punkte $\mathfrak{P}$ erstreckten $\mu + 1$ Produkte:

$$(47\,a) \qquad \mathfrak{Z}_0 = \Pi \mathfrak{P}^{\alpha_0}, \quad \mathfrak{Z}_1 = \Pi \mathfrak{P}^{\alpha_1 - 1}, \quad \mathfrak{Z}_2 = \Pi \mathfrak{P}^{\alpha_2 - 1}, \ldots,$$
$$\mathfrak{Z}_\mu = \Pi \mathfrak{P}^{\alpha_\mu - 1}$$

als *die zu der Schar* $\mathfrak{S}$ *gehörigen Verzweigungsteiler nullter, erster, . . . μ^{ter} Ordnung.* Sie sind die wichtigsten Invarianten der höheren Geometrie. Nur der Verzweigungsteiler nullter Ordnung $\mathfrak{Z}_0$, der größte gemeinsame Teiler aller Divisoren $(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_\mu)$, ist im allgemeinen gebrochen, alle anderen sind endliche *ganze* Divisoren. Ist speziell $\mu = 1$, so treten nur die beiden Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_0 = (\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1)$ und $\mathfrak{Z}_1$ auf; dieser letztere ist, wie eine einfache Überlegung zeigt, der Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_x$ der zu der Funktion $x = \frac{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{D}_1}$ gehörigen *Riemann*schen Fläche $\mathfrak{R}_x$.

Sind ferner:

$$(48) \qquad x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \qquad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \qquad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}$$

drei beliebige nicht konstante Elemente des Körpers und $\Phi(x_0, x_1, x_2) = 0$ die zwischen ihnen bestehende homogene Gleichung n^{ten} Grades, so besteht dieselbe Gleichung $\Phi(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = 0$ zwischen den drei einander äquivalenten Divisoren, welche oben die Zähler von x_0, x_1, x_2 bilden.

Umgekehrt folgt jetzt sofort aus (43a) auf p. 567: sind

$$(48\,a) \qquad \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{D}\mathfrak{G}_0, \quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{D}\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{D}\mathfrak{G}_2$$

drei beliebige ganze oder gebrochene Divisoren einer und derselben Klasse und $\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ ihr größter gemeinsamer Teiler, so besteht zwischen ihnen stets eine homogene Gleichung

$$(48\,b) \qquad \Phi(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = 0,$$

deren Grad n gleich dem Grade der Divisoren $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ ist, und diese Gleichung steigt z. B. in $\mathfrak{A}_0$ bis zum Grade n_0 von $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2}$ an.

16. Die ganzen Divisoren einer Klasse Q bilden einen Teilbereich derselben, den sogenannten *Integritätsbereich der Klasse Q*. In jeder Klasse gibt es stets eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Divisoren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_N$, durch welche alle und nur die ganzen Divisoren in der Form:

$$\mathfrak{G} = c_1\mathfrak{G}_1 + c_2\mathfrak{G}_2 + \cdots + c_N\mathfrak{G}_N$$

mit konstanten Koeffizienten dargestellt werden können. Die Zahl $N = \{Q\}$ der linear unabhängigen ganzen Divisoren innerhalb Q wird die *Dimension* dieser Klasse genannt.[44]) Die Aufstellung eines solchen Systemes und die Bestimmung der Dimension $\{Q\}$, eine Hauptaufgabe der ganzen Theorie, wird folgendermaßen einfach gelöst:

Ist $\mathfrak{D}_0$ ein Multiplikator für die Klasse Q, und sind $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(N)}$ die zu $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_N$ zugeordneten Elemente der Hauptklasse, so bilden die $U^{(i)} = \frac{\mathfrak{G}_i}{\mathfrak{D}_0}$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla des zu $\mathfrak{D}_0$ reziproken Divisors $\overline{\mathfrak{D}_0} = \frac{1}{\mathfrak{D}_0}$ innerhalb des Körpers $K(u, z)$; also können diese Vielfachen $U^{(i)} = \frac{\mathfrak{G}_i}{\mathfrak{D}_0}$ und damit auch die Divisoren $\mathfrak{G}_i = U^{(i)}\mathfrak{D}_0$ nach der p. 565, Nr. **12** auseinandergesetzten Methode rational gefunden werden. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich leicht die Folgerungen:

Ist Q eine Divisorenklasse von der Ordnung q, deren Dimension mindestens gleich zwei ist, so kann man auf rationalem Wege eine nicht konstante Größe x innerhalb $K(u, z)$ finden, deren Grad $n_x \leqq q - \{Q\} + 2$ ist. Legt man diese als unabhängige Variable zugrunde, so geht $K(u, z)$ in einen Körper von derselben Ordnung n_x über. Man kann so den Grad des Körpers stets mindestens auf $(p + 1)$ erniedrigen, wenn p das in (54a) p. 577 definierte *Geschlecht des Körpers* ist.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist das folgende wichtige Theorem:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla eines beliebigen Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb einer Divisorenklasse R ist gleich der Dimension $\left\{\frac{R}{Q}\right\}$ der Klasse $\frac{R}{Q}$, wenn Q die Klasse von $\mathfrak{Q}$ bedeutet; sie ist also von der Wahl des Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb seiner Klasse unabhängig. Ist also speziell Q von höherer oder von gleicher Ordnung wie R, so ist diese Anzahl stets gleich Null, es sei denn, daß $Q = R$ ist; alsdann ist sie gleich Eins.

Es sei endlich Q eine beliebige Klasse, und $\mathfrak{D} = (\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_\mu)$ der größte gemeinsame Teiler aller ihrer ganzen Divisoren; dann heißt Q *eine Klasse vom Teiler* $\mathfrak{D}$; ist $\mathfrak{D} = 1$, so wird Q eine *primitive Klasse* genannt. Es sei D die Klasse von $\mathfrak{D}$, so ist $Q = D\bar{Q}$ und $\bar{Q}$ ist eine primitive Klasse. Dann bestehen für die Dimensionen von $\bar{Q}$ und D die Gleichungen[45]):

$$\{\bar{Q}\} = \{Q\}, \quad \{D\} = 1. \tag{49}$$

44) *D.-W.*, p. 254.
45) *D.-W.*, p. 255.

III. Die zu dem Körper $K(y, x)$ gehörigen Abelschen Integrale.

Eine der wichtigsten Anwendungen der soeben entwickelten Theorie ist die Untersuchung der Integrale algebraischer Differentiale. Hier ist sie im wesentlichen identisch mit der vollständigen Betrachtung einer bestimmten Divisorenklasse, der sogenannten *Differentialklasse.*

17. Die Abelschen Integrale. Sind ξ und ζ_ξ zwei beliebige Elemente des Körpers $K(y, x)$, so wird durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \zeta_\xi \qquad (d\omega = \zeta_\xi d\xi) \tag{50}$$

eine neue analytische Funktion $\omega = \int \zeta_\xi d\xi$ bis auf eine additive Konstante eindeutig definiert, welche *ein zu dem Körper $K(y, x)$ gehöriges Abelsches Integral* genannt wird.[46]) Durch gliedweise Integration der für eine endliche Umgebung einer gegebenen Stelle $\mathfrak{P}(\xi = \xi_0)$ gleichmäßig konvergierenden Potenzreihe für $\zeta_\xi d\xi$ überzeugt man sich, daß sich ein *Abel*sches Integral in der Umgebung einer beliebigen Stelle $\mathfrak{P}$ stets in der Form darstellen läßt:

$$\omega(\mathfrak{P}) = \varrho \lg \pi + \psi(\pi), \tag{51}$$

wo π eine zu $\mathfrak{P}$ gehörige Primfunktion, etwa $(\xi - \xi_0)^{\frac{1}{\alpha}}$ bzw. $\left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ ist, und $\psi(\pi)$ wieder dem Körper $K(u, \mathfrak{p})$ der konvergenten Potenzreihen für $\mathfrak{P}$ angehört, also höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von π enthält. Nur für eine endliche Anzahl von Stellen ist $\varrho \gtrless 0$; diese heißen *logarithmische Stellen* von ω, und der Koeffizient ϱ wird das *Residuum des Differentiales $d\omega$ für die Stelle* $\mathfrak{P}$ genannt.

Ist ω_0 die zu der Stelle $\mathfrak{P}$ gehörige Integrationskonstante, welche von dem Integrationswege abhängt, so soll wieder $\omega - \omega_0$ *durch den Divisor* $\mathfrak{P}^\sigma$ *genau teilbar* heißen, wenn die Entwicklung der Differenz $\omega - \omega_0$ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ im früheren Sinne die Ordnungszahl σ besitzt, oder für diese Stelle durch die σ^{te} Potenz der zugehörigen Primfunktion genau teilbar ist.

Beginnt jedoch diese Entwicklung speziell mit $\lg \pi$, so sagen wir, daß $\omega - \omega_0$ *durch* $\lg \mathfrak{P}$ *genau teilbar* ist, und in diesem Falle müssen wir, wie man leicht einsieht, $\omega - \omega_0$ eine unendlich kleine aber negative Ordnungszahl zuschreiben. Ein Integral ω heißt *regulär*

46) Vgl. *D.-W.*, p. 259 ff., wo eine von Kontinuitätsbetrachtungen freie Einführung der Differentialquotienten gegeben wird. Für die hier gegebene Einführung vgl. *H.-L.*, p. 269 f. und p. 287 f. [*O*]

an der Stelle $\mathfrak{P}$, wenn $\omega - \omega_0$ genau durch die erste Potenz des Primteilers $\mathfrak{P}$ teilbar ist.

Alle zum Körper K gehörigen Integrale bilden einen in sich abgeschlossenen Bereich von im allgemeinen transzendenten Funktionen. Die Erforschung ihrer Eigenschaften und die Darstellung aller Integrale durch möglichst einfache unter ihnen ist die Aufgabe dieses dritten Abschnittes. An Stelle dieser Integralfunktionen ω selbst untersuchen wir ihre Differentiale $d\omega$, die sogenannten *Abelschen Differentiale,* und stellen sie zunächst durch die sie vollständig bestimmenden und von der Wahl der Integrationsvariablen ξ unabhängigen *Differentialteiler* dar. Hierzu führen die folgenden Betrachtungen:

18. Die Differentiale der Elemente des Körpers K und die zugehörigen Divisoren. Es seien ξ und η zwei beliebige nicht konstante Elemente von K und $F(\xi,\eta) = 0$ die zwischen ihnen bestehende irreduktible Gleichung. Dann folgt aus der Gleichung $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{F'_\xi}{F'_\eta}$, daß das Verhältnis irgend zweier Differentiale $d\eta$ und $d\xi$ ebenfalls eine Größe des Körpers, also gleich einem Divisor der Hauptklasse ist, dessen Bestimmung unsere nächste Aufgabe bildet. Aus der Entwicklung von ξ und η in der Umgebung einer beliebigen Stelle $\mathfrak{P}$ ergibt sich nun zunächst der Satz:

Sind ξ_0 und η_0 die zu ξ und η in ihrer Entwicklung in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ gehörigen konstanten Glieder und sind die Differenzen $\xi - \xi_0$ und $\eta - \eta_0$, bzw. durch $\mathfrak{P}^d$ und $\mathfrak{P}^e$ teilbar, so ist der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ genau durch $\mathfrak{P}^{e-d}$ teilbar, d. h. es ist

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \Pi\mathfrak{P}^{e-d}, \tag{52}$$

wenn die Multiplikation über alle Punkte $\mathfrak{P}$ erstreckt wird.

Derselbe Divisor kann auf andere Weise dargestellt werden: Ist nämlich $\mathfrak{K}_\xi$ die zu ξ gehörige Kugelfläche, sind $\mathfrak{Z}_\xi$ und $\mathfrak{n}_\xi$ der Verzweigungsteiler von $\mathfrak{K}_\xi$ und der Nenner von ξ, haben ferner $\mathfrak{K}_\eta$, $\mathfrak{Z}_\eta$ und $\mathfrak{n}_\eta$ dieselbe Bedeutung für das Element η, so kann das Produkt in (52) auch in der Form $\frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} : \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ dargestellt werden, d. h. es besteht der Satz[47]):

Sind ξ und η zwei beliebige Größen des Körpers K, so besteht immer die Gleichung:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} : \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}. \tag{52 a}$$

47) *D.-W.*, p. 263—264. [*O*] *H.-L.*, p. 292.

Ordnen wir daher jedem Differentiale $d\xi$ des Körpers den algebraischen Divisor:

$$\mathfrak{w}_\xi = \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} \tag{52 b}$$

zu, so ist das Verhältnis $\frac{d\xi}{\mathfrak{w}_\xi}$ für alle Elemente des Körpers dasselbe, und jedes Differential $d\xi$, welches zu einem Elemente ξ von $K(x, y)$ gehört, ist so durch den zugehörigen Divisor $\mathfrak{w}_\xi$ vollständig bestimmt.

Schreiben wir jetzt ein beliebiges *Abel*sches Differential in einer der Formen $d\omega = \zeta_\xi d\xi = \zeta_\eta d\eta$, indem wir das eine Mal ξ, das andere Mal η als Integrationsvariable wählen, so ergibt sich für das Verhältnis der beiden Integranden ζ_ξ und ζ_η

$$\frac{\zeta_\xi}{\zeta_\eta} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathfrak{w}_\eta}{\mathfrak{w}_\xi}.$$

Also ist der algebraische Divisor:

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_\omega &= \zeta_\xi \mathfrak{w}_\xi = \zeta_\eta \mathfrak{w}_\eta \\ &= \zeta_\xi \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} = \zeta_\eta \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} \end{aligned} \tag{53}$$

von der Wahl der Integrationsvariablen ganz unabhängig und allein durch das Differential $d\omega$ vollständig bestimmt; daher wird der Divisor $\mathfrak{w}_\omega$ *der zu* $d\omega$ *gehörige Differentialteiler*[48]) *genannt*, und so ist auch allgemein jedes *Abel*sche Differential $d\omega$ ebenso wie vorher jedes zu einem Elemente von K gehörige Differential vollständig durch den zugehörigen Divisor $\mathfrak{w}_\omega$ bestimmt.

Durch den Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ ist das Verhalten des Integrales ω an jeder Stelle $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt. Durch geeignete Spezialisierung der Integrationsvariablen für die zu untersuchende Stelle ergibt sich nämlich leicht der Satz:

Ist $\mathfrak{P}$ ein d-facher Divisor des zu $d\omega$ gehörigen Differentialteilers $\mathfrak{w}_\omega$, so ist die zum Punkte $\mathfrak{P}$ gehörige Differenz $\omega - \omega_0$ durch $\mathfrak{P}^{d+1}$ oder durch $\lg \mathfrak{P}$ genau teilbar, je nachdem $d \gtrless -1$ oder $d = -1$ ist.

Ist also allgemein $\omega - \omega_0$ in einem Punkte $\mathfrak{P}$ von der Ordnung ϱ, so ist der zugehörige Differentialteiler durch das über alle Punkte $\mathfrak{P}$ zu erstreckende Produkt

$$\mathfrak{w}_\omega = \prod \mathfrak{P}^{\varrho - 1} \tag{53 a}$$

definiert, wenn für diejenigen Punkte, für welche ϱ negativ unendlich klein ist (vgl. Nr. **17**) diese Zahl durch Null ersetzt wird.

48) *D.-W.*, p. 268. [*O*] *H.-L.*, p. 294.

19. Die Differentialklasse *W*. Betrachtet man alle *Abel*schen Differentiale ($d\omega = \xi_\xi d\xi$, $d\omega' = \xi_\xi' d\xi, \ldots$) des ganzen Körpers K, so sind die zugehörigen Differentialteiler ($\mathfrak{w}_\omega$, $\mathfrak{w}_\omega', \ldots$) äquivalente Divisoren, wie aus den Gleichungen $\frac{\mathfrak{w}_\omega}{\mathfrak{w}_\omega'} = \frac{\xi_\xi}{\xi_\xi'}, \cdots$ unmittelbar folgt. Sie bilden also die sämtlichen Divisoren einer Klasse W, der sogenannten *Differentialklasse*, ebenso wie die Elemente von $K(u, z)$ die sämtlichen Divisoren der Hauptklasse ausmachen. Die Ordnung dieser Klasse ist gleich derjenigen irgend eines Divisiors $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$, also gleich

$$\mathfrak{w}_\xi - 2n_\xi = 2p - 2, \tag{54}$$

wenn die ganze Zahl:

$$p = \tfrac{1}{2} w_\xi - n_\xi + 1, \tag{54 a}$$

das sogenannte *Geschlecht des Körpers* $K(u, z)$, als wichtigste Invariante der ganzen Theorie in die Untersuchung eingeführt wird. Es ergibt sich hier ohne weiteres, daß das Geschlecht von der Wahl der Variablen ξ innerhalb des Körpers ganz unabhängig ist.

Als Multiplikator für den Übergang von der Hauptklasse zur Differentialklasse kann man irgend einen Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ von W wählen. Dieser Festsetzung entspricht dann die Wahl von ξ als Integrationsvariablen.

20. Die Fundamentalaufgabe in der Theorie der Abelschen Integrale kann nun auch analog wie in Nr. **16**, p. 573 folgendermaßen ausgesprochen werden:

Es soll ein vollständiges System linear unabhängiger Differentiale ($d\omega_1, d\omega_2, \ldots, d\omega_\mu$) gefunden werden, deren Divisoren $\mathfrak{w}_{\omega_i}$ Multipla eines beliebig gegebenen Divisors $\mathfrak{Q}$ sind, für welche also:

$$\mathfrak{w}_{\omega_i} = \mathfrak{Q}\mathfrak{G}_{\omega_i}$$

ist, wenn die $\mathfrak{G}_{\omega_i}$ ganze Divisoren bedeuten. Oder, was dasselbe ist, es sollen alle *Abel*schen Integrale mit vorgeschriebenen Nullstellen, Polen oder logarithmischen Punkten gefunden werden.

Nach dem allgemeinen Satze auf p. 573 ist diese Anzahl der linear unabhängigen Differentialteiler für alle Divisoren $\mathfrak{Q}$ einer Klasse Q dieselbe, nämlich gleich der Dimension $\left\{\frac{W}{Q}\right\}$ der sogenannten *Ergänzungsklasse zu* Q: $Q' = \frac{W}{Q}$. Die hier gestellte Aufgabe ist also identisch mit der Frage nach der Dimension zweier Klassen Q und Q' der Ordnungen q und q', für welche $QQ' = W$, also $q + q' = 2p - 2$ ist. Diese Frage wird vollständig beantwortet durch die folgende Beziehung

zwischen den Ordnungs- und Dimensionszahlen zweier Ergänzungsklassen, den sogenannten *Riemann-Rochschen Satz*[49]):

Sind Q und Q' zwei beliebige Ergänzungsklassen, so ist stets:

$$\text{(I)} \qquad \{Q\} - \frac{q}{2} = \{Q'\} - \frac{q'}{2}$$

$$\text{(II)} \qquad \{Q'\} = \{Q\} - q + p - 1.$$

Von diesen Gleichungen ist jede eine Folge der anderen. Wählt man, was auf das Resultat ohne Einfluß ist, die unabhängige Variable ξ innerhalb K sowie die beiden Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ innerhalb Q und Q' geeignet aus, so ist der *Riemann-Roch*sche Satz eine unmittelbare einfache Folgerung aus der Beziehung zwischen einem Fundamentalsystem $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)})$ für die Multipla des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}_\xi}$ und seinem komplementären Systeme $(\breve{U}^{(1)}, \breve{U}^{(2)}, \ldots, \breve{U}^{(n)})$, welches nach (42) ein Fundamentalsystem für die Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}'\mathfrak{n}_\xi}$ wird, wenn eben $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ so ausgewählt sind, daß $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}' = \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ ist.[50])

Wählt man für $\mathfrak{Q}$ irgend einen Divisor $\mathfrak{Q}_U$ der Hauptklasse oder setzt man ganz speziell $\mathfrak{Q} = 1$, so ergibt sich als Folgerung:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Integrale, deren Divisor $\mathfrak{w}_\omega$ ein Multiplum einer beliebigen Funktion des Körpers $K(u, z)$ ist,

---

49) Die entsprechenden Entwicklungen bei *D.-W.*, p. 273—281 gestalten sich noch sehr unübersichtlich infolge der Beschränkung auf Klassen mit einer Dimension ≥ 1. [*O*]

50) *H.-L.*, p. 301 f. Die Beziehung zwischen dem *Riemann-Roch*schen Satz und dem zu einem Fundamentalsystem für ganze Größen komplementären System haben zuerst *D.-W.* erkannt (*D.-W.*, p. 274—281). An allgemeinere Fundamentalsysteme (für Formen) knüpft die Untersuchung des *Riemann-Roch*schen Satzes erst *Landsberg* (Math. Ann. 50 (1898), p. 333—380) an. Mit dem so aufgefaßten *Riemann-Roch*schen Satz stimmt sachlich das „Complementary theorem" vollständig überein, in dem die *Fields*sche Theorie der algebraischen Funktionen gipfelt (*J. C. Fields*, Theorie of the algebraic functions of a complex variable 1906); vereinfachte Darstellungen Phil. Trans. A. 212 (1913), p. 339—373, International Congress of Mathematicians (Proceed. Cambridge 1913, Vol. I, p. 312). Darin entspricht die *Inzidenzbasis* (basis of coincidences) dem Exponentensystem eines beliebigen Divisors; ist R eine beliebige Funktion des Körpers, (m_i) das Exponentensystem des entsprechenden Divisors, so sind zwei Inzidenzbasen *komplementär* in bezug auf die durch R gegebene Inzidenzbasis (m_i), wenn das Produkt der entsprechenden Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ gleich $R\frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{n}_z^2}$ ist, wo z die unabhängige Variable bezeichnet. (Dann sind offenbar die Klassen von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ Ergänzungsklassen.) Und das „Complementary theorem" gibt die Beziehung zwischen den Dimensionen der durch $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ teilbaren Funktionenscharen. [*O*]

speziell also auch die Anzahl der unabhängigen allenthalben endlichen Integrale (*Integrale erster Gattung*), ist stets gleich dem Geschlechte p des Körpers.

Setzt man zweitens $\mathfrak{Q} = \frac{1}{\mathfrak{n}_\omega}$, wo $\mathfrak{n}_\omega$ einen beliebigen *ganzen* Divisor bedeutet, so ergibt sich:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale, deren Differentialteiler einen gegebenen Nenner besitzt, ist stets gleich $\nu + p - 1$, wenn ν den Grad von $\mathfrak{n}_\omega$ bedeutet.

Aus der in Nr. **12** (p. 565) angegebenen Vorschrift ergibt sich nun ein endliches rationales Verfahren zur wirklichen Aufstellung eines vollständigen Systemes von linear unabhängigen Differentialen, deren Divisor ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$ ist. Wendet man dieses auf den Fall $\mathfrak{Q} = 1$, also auf die Differentiale erster Gattung an, so ergibt sich folgende Vorschrift: Es möge an der Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ kein Verzweigungspunkt liegen. Ist dann $(U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die ganzen algebraischen Funktionen von $K(u, z)$, welches für die Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ normal ist, und bedeutet $(\breve{U}^{(1)}, \breve{U}^{(2)}, \ldots, \breve{U}^{(n)})$ das komplementäre System, so ist dieses nach Nr. **12** (p. 566) ein ebenfalls für $\mathfrak{p}_\infty$ normales Fundamentalsystem für die Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{F}_x}$. Ist daher allgemein $\breve{U}^{(i)}$ für $\mathfrak{p}_\infty$ von der Ordnung $\bar{\varrho}_i$, so bilden die

$$p = \sum_1^n \bar{\varrho}_i - n + 1 = \frac{w}{2} - n + 1$$

Elemente

$$\breve{U}^{(i)}, x\breve{U}^{(i)}, \ldots, x^{\bar{\varrho}_i - 2}\breve{U}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{F}_x}$, d. h. ein vollständiges System von Integranden erster Gattung.[51])

21. Die Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung. Aus dem *Riemann-Roch*schen Satze folgt sofort, daß die Differentialklasse W primitiv ist.

---

51) Diese Darstellung der Integrale erster Gattung mit Hilfe der zur Normalbasis komplementären geben zuerst *D.-W.*, p. 271—273, homogen *Hensel*, J. f. Math. 109 (1892), p. 37; 8. f. Math. 117 (1896), p. 29—41; inhomogen *Baker*, Math. Ann. 45 (1894), p. 115 ff., *B.* 67; homogen *Landsberg*, Math. Ann. 50, p. 356—360, *inhomogen H.-L.*, p. 298—300. *Baur* führt die Rechnungen für hyperelliptische [Math. Ann. 41 (1893), p. 491] und kubische [Math. Ann. 43 (1893), p. 505] und besondere [Math. Ann. 46 (1895)] Körper durch. Über die *Baker*sche Darstellung der Integrale zweiter und dritter Gattung durch die zur Normalbasis komplementären s. *Baker*, Math. Ann. 44 (1894), p. 127. [*O*]

Man kann also stets ein Integral erster Gattung finden, welches sich in einer beliebig gegebenen Stelle $\mathfrak{P}$ regulär verhält.

Diesem Satze kann man ebenfalls mit Hilfe des *Riemann-Roch*schen Satzes die folgende Verallgemeinerung geben:

Ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_\nu$ ein beliebiger ganzer Divisor, dessen Ordnung ν größer als Eins ist, so ist die Divisorenklasse $(\mathfrak{N}\, W)$ stets primitiv, d. h. die ganzen Divisoren dieser Klasse sind teilerfremd. Dagegen besitzt für $\nu = 1$ die Klasse $(\mathfrak{P}\, W)$ stets den Teiler $\mathfrak{P}$.

Da man somit, falls $\nu > 1$ ist, in jeder Klasse $(\mathfrak{N}\, W)$ stets auch ein zu $\mathfrak{N}$ teilerfremdes Element finden kann, so existiert auch stets ein Integral, dessen Differentialteiler in der reduzierten Form gleich $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{N}}$ ist. Dagegen gibt es niemals einen Differentialteiler, welcher die reduzierte Form $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$ besitzt.

In der primitiven Differentialklasse W von der Dimension p existieren genau p linear unabhängige teilerfremde ganze Divisoren oder Differentialteiler erster Gattung $(\mathfrak{G}^{(1)}, \mathfrak{G}^{(2)}, \dots, \mathfrak{G}^{(p)})$. Ist ferner $\mathfrak{P}_0$ ein ein für alle Male fest, aber sonst beliebig angenommener Punkt, und $\mathfrak{P}_1$ irgendein von $\mathfrak{P}_0$ verschiedener Divisor, so existiert innerhalb W *ein sog. Differentialteiler dritter Gattung*, welcher die reduzierte Form $\frac{\mathfrak{G}_{01}}{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1}$ hat. Endlich existieren für jeden Primteiler $\mathfrak{P}$ die Differentialteiler zweiter Gattung $\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{P}^2}, \frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{P}^3}, \dots, \frac{\mathfrak{G}_\mu}{\mathfrak{P}^\mu}, \dots$

Dann zeigt man wörtlich ebenso, wie bei der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen, daß man jeden Divisor $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ der Klasse W als homogene lineare Funktion dieser Differentialteiler erster, zweiter und dritter Gattung mit konstanten Koeffizienten darstellen kann, und aus dem *Riemann-Roch*schen Satz folgt sofort, daß diese Darstellung auch nur auf eine einzige Weise möglich ist. Nennen wir die zu den elementaren Differentialteilern gehörigen Integrale *die Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung*, so folgt aus der vorigen Partialbruchzerlegung von $\mathfrak{w}_\omega$ durch Multiplikation mit $\frac{\mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{F}_x} dx$ und Integration:

Jedes *Abel*sche Integral kann auf eine einzige Weise als Summe von Elementarintegralen erster, zweiter und dritter Gattung dargestellt werden.[52])

52) *D.-W.*, p. 281—284. [*O*]

22. Spezialisierung für die Integrale mit rationalem Integranden. Ist der Körper $K(x, y)$ speziell vom Geschlecht Null, ist er also gleich dem rationalen Körper $K(z)$, so ist für ihn $\mathfrak{Z}_z = 1$, und zu jedem Integrale

$$\omega = \int \xi_z dz$$

mit rationalem Integranden gehört der Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega = \frac{\xi_z}{n_z^2} = \frac{\mathfrak{d}_\omega}{\mathfrak{n}_\omega}$ von der $(-2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Die Differentialklasse $W = \left(\cdots \frac{\xi_z}{n_z^2} \cdots \right)$ besteht also aus allen und nur den Divisoren, deren Nenner zwei Primfaktoren mehr enthält als der Zähler. Hieraus folgt schon, daß es hier keine Integrale erster Gattung gibt, und daß die zu den Normalintegralen zweiter und dritter Gattung gehörigen Differentialteiler $\frac{1}{\mathfrak{p}^\varrho}$ und $\frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}$ sind, wobei $\varrho > 1$ ist, und $\mathfrak{p}$ einem endlichen oder dem unendlich fernen Punkte entsprechen kann. Für den rationalen Körper ergibt sich so der folgende Satz:

Unter den Integralfunktionen rationaler Differentiale gibt es keine Integrale erster Gattung; die Elementarintegrale zweiter Gattung sind hier rationale Funktionen von z, nämlich:

$$-\frac{1}{\varrho - 1} \int \frac{dz}{(z-\alpha)^\varrho} = \frac{1}{(z-\alpha)^{\varrho-1}} \quad \text{oder} \quad (\varrho + 1) \int z^\varrho dz = z^{\varrho+1}.$$

Nur das Elementarintegral dritter Gattung ist transzendent, nämlich

$$(\alpha - \alpha') \int \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\alpha')} = \lg \frac{z-\alpha}{z-\alpha'} \quad \text{oder} \quad \int \frac{dz}{z-\alpha'} = \lg(z - \alpha'),$$

je nachdem der Punkt $z = \alpha$ im Endlichen liegt oder der unendlich ferne Punkt ist.

IV. Die zum Körper $K(y, x)$ gehörigen algebraischen Kurven.

23. Die ebenen algebraischen Kurven und ihre singulären Punkte. Es sei wieder ein beliebiger Körper $K(u, z)$ gegeben; x, y seien irgend zwei nicht konstante Elemente desselben, und es sei

$$F(x, y) = 0 \tag{55}$$

die zwischen ihnen bestehende irreduktible Gleichung, welche in bezug auf x den Grad m, für y den Grad n haben möge; ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir x und y so gewählt voraussetzen, daß $K(y, x) = K(u, z)$ ist. Die Gesamtheit aller jene Gleichung befriedigenden reellen und komplexen Wertsysteme bezeichnen wir als *ein algebraisches Gebilde* und interpretieren es durch das geometrische Bild einer zu dem Körper gehörigen ebenen algebraischen Kurve $\mathfrak{C}$.

Jedem Punkte $\mathfrak{P}$ der *Riemann*schen Fläche $\mathfrak{K}_x$ oder $\mathfrak{K}_y$ bzw. dem ihm zugeordneten Primteiler $\mathfrak{P}$ entspricht dann ein endlicher oder unendlich ferner Punkt $P(x = a, y = b)$ der Kurve $\mathfrak{C}$. Umgekehrt gehört ein Punkt $P(a, b)$ der xy-Ebene stets und nur dann der Kurve $\mathfrak{C}$ an, wenn die Zählerdivisoren $\mathfrak{z}_{x-a}$ und $\mathfrak{z}_{y-b}$ der beiden Linearfaktoren $x - a, y - b$ einen gemeinsamen Teiler besitzen. Haben diese Divisoren nur einen einzigen Primteiler $\mathfrak{P}$ gemeinsam, entsprechen sich also P und $\mathfrak{P}$ eindeutig, so heißt $P = (a, b)$ *ein regulärer Punkt der Kurve* $\mathfrak{C}$. Ist dagegen dieser gemeinsame Teiler:

$$\mathfrak{K} = (\mathfrak{z}_{x-a}, \mathfrak{z}_{y-b}) = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\dots\mathfrak{P}_\varkappa^{\alpha_\varkappa} \tag{56}$$

von höherer als der ersten Ordnung, so entspricht den $\varkappa$ Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\varkappa$ der Kugelflächen $\mathfrak{K}_x$ oder $\mathfrak{K}_y$ derselbe Kurvenpunkt P; dieser heißt dann ein *nicht regulärer oder singulärer Punkt von* $\mathfrak{C}$.

Und zwar heißt $P = (a, b)$ ein *k-facher Kurvenpunkt*, wenn $\mathfrak{z}_{x-a}$ und $\mathfrak{z}_{y-b}$ einen Divisor k^{ter} Ordnung $\mathfrak{K}$ gemeinsam haben. Ist a oder b gleich unendlich, so tritt $\frac{1}{x}$ an die Stelle von x oder $\frac{1}{y}$ an die Stelle von y, also $\mathfrak{n}_x$ bzw. $\mathfrak{n}_y$ an die Stelle von $\mathfrak{z}_{x-a}$ bzw. $\mathfrak{z}_{y-b}$. Enthält dieser Teiler $\mathfrak{K}$ $\varkappa$ voneinander verschiedene Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\varkappa$, so gehen von dem zugehörigen Kurvenpunkte P $\varkappa$ verschiedene *Äste* oder *Zweige* aus; die Kurve $\mathfrak{C}$ besitzt in P eine *$\varkappa$-zweigige Singularität*.

Die dem Kurvenpunkte P zugeordneten Stellen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\varkappa$ entsprechen auf den *Riemann*schen Flächen $\mathfrak{K}_x$ und $\mathfrak{K}_y$ bzw. den Werten $x = a$ und $y = b$. Ist z. B. in (56) $\alpha_1 > 1$, so ist $\mathfrak{P}_1$ sowohl auf $\mathfrak{K}_x$ als auch auf $\mathfrak{K}_y$ mindestens ein α_1-blättriger Verzweigungspunkt, und die Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_x$ und $\mathfrak{Z}_y$ haben den gemeinsamen Teiler $\mathfrak{P}_1^{\alpha_1-1}$.

Ein endlicher Punkt $P = (a, b)$ ist dann und nur dann ein k-facher Kurvenpunkt, wenn in ihm alle Ableitungen $\frac{\partial^{g+h}F}{\partial x^g \partial y^h}$ verschwinden, für welche $g + h < k$ ist, aber mindestens eine Ableitung k^{ter} Ordnung von Null verschieden ist, wenn also in der Entwicklung:

$$F(x, y) = u_0 + u_1 + \dots + u_{k-1} + u_k \dots \tag{57}$$

nach steigenden Potenzen von $x - a$ und $y - b$ die homogenen Aggregate $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ der $0, 1, \dots, (k-1)^{\text{ten}}$ Dimensionen identisch verschwinden, u_k aber nicht Null ist. Insbesondere ist P dann und nur dann ein vielfacher Kurvenpunkt, wenn die drei Funktionen $F(x, y)$, $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ in P verschwinden.

Jede Funktion $t_\lambda = (y-b) - \lambda(x-a)$ des Körpers $K(x,y)$ enthält ebenfalls den Divisor $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \dots \mathfrak{P}_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$; jeder Strahl des Strahlenbüschels $t_\lambda = 0$ mit dem Träger P trifft also jeden der den Primteilern zugeordneten in P sich schneidenden Äste mindestens in α_i in P koinzidierenden Punkten. Unter ihnen gibt es einen einzigen Strahl $t_{\lambda_i} = 0$, für welchen die Funktion t_{λ_i} mindestens durch $\mathfrak{P}_i^{\alpha_i+1}$ teilbar ist; dieser heißt *die Tangente in* P des zu $\mathfrak{P}_i$ gehörigen Kurvenzweiges.

Besitzt also $\mathfrak{C}$ in P eine $\varkappa$-zweigige Singularität, so hat sie dort $\varkappa$ verschiedene oder zusammenfallende Tangenten $t_1, t_2, \dots, t_\varkappa$.

Die $\varkappa$ Richtungskoeffizienten λ_i dieser Tangenten sind die Wurzeln der Gleichung k^{ten} Grades

$$u_k(1,\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_k\lambda^k = 0, \tag{58}$$

wo $u_k(x-a, y-b)$ das Aggregat der Glieder k^{ter} Dimension in (57) ist. Dann und nur dann, wenn diese Gleichung keine gleichen Wurzeln besitzt, ist P ein k-facher Punkt mit getrennten Tangenten; alsdann besitzt $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_k$ keine mehrfachen Primfaktoren. Für $k=2$ erhält man so den Doppelpunkt mit getrennten Tangenten.

24. Der zur Kurve $\mathfrak{C}$ gehörige Divisor der Doppelpunkte. Zur vollständigen Charakterisierung eines beliebigen singulären Punktes führt die Zerlegung der beiden Funktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ des Körpers $K(x,y)$ in ihre Primfaktoren, von denen wegen der zwischen ihnen bestehenden Gleichung:

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\mathfrak{Z}_y}{\mathfrak{n}_y^2}}{\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}} \tag{59}$$

nur einer, etwa $\frac{\partial F}{\partial y}$ zu untersuchen ist.

Durch direkte Untersuchung der Nullstellen und Pole dieser Funktion ergeben sich in Verbindung mit (59) leicht die beiden Gleichungen:

$$-\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_y}{\mathfrak{n}_x^{m-2}\mathfrak{n}_y^n}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^m\mathfrak{n}_y^{n-2}}. \tag{60}$$

Der durch diese Gleichungen vollständig bestimmte *ganze* Divisor $\mathfrak{D}$ heißt *der zu* $\mathfrak{C}$ *gehörige Divisor der Doppelpunkte*, weil er alle und nur die zu singulären Punkten von $\mathfrak{C}$ gehörigen Primfaktoren in einer von der Art der Singularität abhängigen Multiplizität enthält[53]);

53) Den Divisor der Doppelpunkte haben zuerst *D.-W.*, p. 267, als *Polygon der Doppelpunkte* eingeführt, wobei jedoch von den im Unendlichen liegenden Singularitäten abgesehen wird. [*O*]

eine leichte Betrachtung zeigt speziell, daß für einen gewöhnlichen Doppelpunkt $\mathfrak{D}$ genau durch das Produkt der beiden zugehörigen Primfaktoren teilbar ist. Dieser Divisor spielt in der Kurventheorie eine ähnlich wichtige Rolle, wie der Verzweigungsteiler in der Theorie der *Riemann*schen Flächen; er hängt aber von *beiden* Elementen x und y ab und bleibt nur bei *linearen* Transformationen:

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \qquad y = \frac{\alpha'\eta + \beta'}{\gamma'\eta + \delta'}$$

unverändert. Man kann $\mathfrak{D}$ auch als Nenner der zu dem Differentiale:

$$d\varphi = \frac{dx}{F_y'} = -\frac{dy}{F_x'} = \frac{\mathfrak{n}_x^{m-2}\mathfrak{n}_y^{n-2}}{\mathfrak{D}} \tag{61}$$

gehörigen Differentialteiler definieren.

Da die Ordnung irgend eines Differentialteilers nach (54) gleich $2p - 2$ ist, so folgt hieraus, daß die Ordnung $2d$ von $\mathfrak{D}$ stets eine gerade Zahl ist, und zwar ist

$$d = (m-1)(n-1) - p, \tag{62}$$

während sich aus (60) die Gleichungen

$$d = (m-1)n - \tfrac{1}{2}w_y = (n-1)m - \tfrac{1}{2}w_x \tag{62a}$$

ergeben, weil Zähler und Nenner von F_x' und F_y' von gleicher Ordnung sind. Aus (62) geht hervor, daß die Maximalzahl $(m-1)(n-1)$ von Doppelpunkten nur für Kurven vom Geschlecht Null, d. h. für sog. *Unicursalkurven*, erreicht wird.

Es sei jetzt $P = (a, b)$ ein endlicher Punkt von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}_1$ einer der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu$ der *Riemann*schen Fläche $\mathfrak{R}_x$, welcher der Stelle $\mathfrak{p}_a$ $(x = a)$ zugeordnet ist. Wir fragen jetzt, welche Potenz von $\mathfrak{P}_1$ in dem Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte enthalten ist, vorausgesetzt, daß der Stelle $\mathfrak{p}_a$ kein Pol von y entspricht. Es sei dann:

$$F(y, x) = F_1(y)F_2(y)\ldots F_\nu(y) \tag{63}$$

die Zerlegung von $F(y, x)$ für den Bereich der Stelle $\mathfrak{p}_a$. Sind dann $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(\nu)}$ je eine Wurzel aus den zu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu$ gehörigen Wurzelzyklen[54]), so besitzt

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=y^{(1)}} = F_1'(y^{(1)})F_2(y^{(1)})\ldots F_\nu(y^{(1)}) \tag{63a}$$

im Punkte $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{R}_x$ dieselbe Ordnungszahl, wie die Funktion:

$$D(F_1)R(F_1, F_2)\ldots R(F_1, F_\nu) \tag{63b}$$

in dem zugeordneten Punkte $\mathfrak{p}$ der einblättrigen Kugelfläche, wenn $D(F_1)$ die Diskriminante von $F_1(y)$, und allgemein $R(F_i, F_k)$ die Eliminationsresultante von $F_i(y)$ und $F_k(y)$ bedeutet.

---

54) Literatur zur Theorie der Zyklen s. *B.-N.*, p. 381 ff.; III C 4, Nr. **14**, **16**. [*O*]

Ist nun $\mathfrak{P}_1$ ein a_1-blättriger Verzweigungspunkt, also $F_1(y)$ vom a_1^{ten} Grade, so ist $D(F_1)$ durch $\mathfrak{p}^{a_1-1+2l_{11}}$, also $F_1'(y^{(1)})$ durch $\mathfrak{P}_1^{a_1-1}\mathfrak{P}_1^{2l_{11}}$ teilbar, wo l_{11} eine nicht negative ganze Zahl bedeutet. Ist ferner allgemein für $i \gtrless k$ $l_{ik} = l_{ki}$ die Ordnungszahl der Eliminationsresultante $R(F_i(y), F_k(y))$, so gibt dieselbe Zahl die Ordnung von $F_i(y^{(k)})$ für $\mathfrak{P}_k$ und von $F_k(y^{(i)})$ für $\mathfrak{P}_i$ an; l_{ik} ist immer eine nicht negative ganze Zahl, und stets und nur dann Null, wenn die zu $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_k$ gehörigen Wurzelzyklen $y^{(i)}$ und $y^{(k)}$ verschiedene Anfangsglieder besitzen.

Also enthält $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^{\mu}\mathfrak{n}_y^{\nu-2}}$ den Primteiler $\mathfrak{P}_1$ genau in der Potenz $\mathfrak{P}_1^{a_1-1+2l_{11}+l_{12}+\cdots+l_{1\nu}}$, und das Entsprechende gilt für die ν anderen Teiler $\mathfrak{P}_i$. Beachtet man nun, daß $\mathfrak{Z}_a$ genau durch $\mathfrak{P}_i^{a_i-1}$ teilbar ist, während nach dem Vorhergehenden $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{n}_y$ keinen Faktor $\mathfrak{P}_i$ enthalten, so ergibt sich leicht die folgende vollkommen übersichtliche Darstellung des Divisors der Doppelpunkte:

$$\mathfrak{D} = \prod_{g \leqq h}^{(P)} (\mathfrak{P}_g \mathfrak{P}_h)^{l_{gh}}, \tag{64}$$

wo das Produkt nur auf die singulären Punkte P der Kurve und jedesmal nur auf die Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\varkappa$ zu erstrecken ist, welche den $\varkappa$ Zweigen von P entsprechen.[55])

Es ist leicht, die Ordnungszahlen l_{gh} durch die Exponenten der Reihenentwicklungen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ für die Stelle $\mathfrak{p}_a$ auszudrücken: Es seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ für $\mathfrak{K}_x$ Verzweigungspunkte der a_1^{ten} und a_2^{ten} Ordnung und

$$y^{(1)} - b = \lambda^{(1)}(x-a)^{\frac{b_1}{a_1}} + \cdots, \quad y^{(2)} - b = \lambda^{(2)}(x-a)^{\frac{b_2}{a_2}} + \cdots \tag{65}$$

je eine der zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gehörigen konjugierten Wurzelzyklen von y. Ist also allgemein π_i die zu $\mathfrak{P}_i$ gehörige Primfunktion, so ist für den Bereich dieses Punktes:

$$\pi_i \sim (x-a)^{\frac{1}{a_i}} \sim (y-b)^{\frac{1}{b_i}}, \text{ d. h. } x - a \sim \pi_i^{a_i}, \; y - b \sim \pi_i^{b_i},$$

und es ist:

$$(x-a, y-b) \sim \Pi \mathfrak{P}_i^{m(a_i, b_i)}, \tag{66}$$

wo hier wie im folgenden $m(\alpha_i, \beta_i)$ die kleinere der beiden Zahlen α_i, β_i bedeutet. Ebenso ergibt sich für den gemeinsamen Teiler der beiden Verzweigungsdivisoren:

$$(\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{Z}_y) \sim (\Pi \mathfrak{P}_i^{a_i-1}, \Pi \mathfrak{P}_i^{b_i-1}) \sim \frac{(x-a, y-b)}{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_\varkappa}. \tag{66a}$$

55) Vgl. *B.-N.*, p. 381—388. [*O*]

Ferner ist jede der Differenzen $y_1^{(1)} - y_i^{(1)}$ des ersten Wurzelzyklus mindestens durch $(x-a)^{\frac{b_1}{a_1}}$, jede Differenz $y_1^{(1)} - y_k^{(2)}$ von je einer zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gehörigen Wurzel mindestens durch $(x-a)^{m\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right)}$ teilbar. Da nun $F_1'(y_1)$ aus $a_1 - 1$ Differenzen der ersten, $F_2(y_1)$ aus a_2 Differenzen der zweiten Art besteht, so folgt sofort, daß l_{11} mindestens gleich $(a_1-1)(b_1-1)$, l_{12} mindestens gleich $m(a_1 b_2, a_2 b_1)$ ist. Hieraus ergeben sich die folgenden Sätze:

Jeder gemeinsame Teiler $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{Z}_x$ und $\mathfrak{Z}_y$ ist auch in $\mathfrak{D}$ enthalten.

Denn unter dieser Voraussetzung sind a_1 und b_1 beide größer als Eins, also $l_{11} > 0$.

Der kleinste Wert, welchen l_{11} erhalten kann, ist Null, und dies tritt dann und nur dann ein, wenn $m(a_1, b_1) = 1$, also a_1 oder b_1 gleich Eins ist, oder, was dasselbe ist, wenn $(x-a, y-b)$ genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{P}_1$ teilbar ist.

Der kleinste Wert, welchen l_{12} für einen regulären Punkt P annehmen kann, ist Eins, und das tritt dann und nur dann ein, wenn $m(a_1 b_2, a_2 b_1) = 1$, wenn also $m(a_1, b_1) = m(a_2, b_2) = 1$ ist, und wenn außerdem $\frac{dy}{dx}$, d. h. die Steigung der Tangente, in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ verschiedene Werte hat. Alsdann ist also $(x-a, y-b)$ genau durch $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ teilbar, und $(\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{Z}_y)$ enthält diese Primfaktoren gar nicht; nur einer der beiden Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ kann also ein Verzweigungspunkt für $\mathfrak{R}_x$ oder für $\mathfrak{R}_y$ sein.

Hieraus und aus (64) folgt das Fundamentaltheorem:

Der Divisor der Doppelpunkte $\mathfrak{D}$ enthält jeden zu einem $\varkappa$-zweigigen singulären Punkte $P_k = (a, b)$ gehörigen Primteiler $\mathfrak{P}$ mindestens in der $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Potenz, und diese untere Grenze wird dann und nur dann erreicht, wenn $\mathfrak{R} = (\mathfrak{z}_{x-a}, \mathfrak{z}_{y-b}) = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_\varkappa$ keine gleichen Primteiler besitzt, und wenn außerdem P_k lauter verschiedene Tangenten hat. In diesem Falle soll P_k *ein gewöhnlicher singulärer Punkt* genannt werden.

Liegen die Doppelpunkte und Verzweigungspunkte der Kurve $\mathfrak{C}$ alle im Endlichen, und ist $D(F)$ die Diskriminante der Kurvengleichung $F = 0$, so folgt aus (60) die Gleichung:

$$D(F) \sim N(F'(y)) = N(\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_x) = N(\mathfrak{D}) N(\mathfrak{Z}_x). \tag{67}$$

Jede zum Körper $K(x, y)$ gehörige Gleichungsdiskriminante besteht also aus zwei Faktoren, von denen der erste:

$$N(\mathfrak{D}) = \left\{ \prod_{(P)} (x-a)^{\sum_{g \leqq h} l_{gh}} \right\}^2 \tag{67a}$$

quadratisch ist; dieser, *der sog. außerwesentliche Diskriminantenteiler*, ist die Idealnorm des Divisors $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte, der zweite, *der wesentliche Diskriminantenteiler*, ist die Idealnorm des Verzweigungsteilers, ihre Grade sind $2d$ und w_x. Sind die beiden Voraussetzungen nicht erfüllt, so treten in jenen Faktoren Graderniedrigungen ein. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem entsprechenden (60) für die Divisoren, während jener aus diesem nicht erschlossen werden kann.[56])

25. Auflösung der Singularitäten einer Kurve. Unter einer *regulären Kurve* verstehen wir eine Kurve mit lauter gewöhnlichen im Endlichen liegenden singulären Punkten. Für diese und nur für sie ist der Divisor der Doppelpunkte durch das über alle k-fachen Punkte

56) Die Begriffe des *wesentlichen* und des *außerwesentlichen Diskriminantenteilers* sind von *Kronecker* eingeführt worden (Discr. p. 313, s. auch Festschrift p. 22. Von dem dort entwickelten Begriff der Diskriminante der Gattung ist der Begriff des wesentlichen Diskriminantenteilers ein spezieller Fall). Bei *D.-W.*, p. 194 wird der wesentliche Diskriminantenteiler unter dem Namen der Körperdiskriminante eingeführt.

Ist y eine ganze algebraische Funktion n. Grades von x, und $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ eine Fundamentalbasis für die ganzen Größen von $K(y, x)$, so ist die Diskriminante Δ des Systems $(f_0, \ldots f_{n-1})$ der wesentliche Diskriminantenteiler von y; es ist dann:

$$d(1, y, \ldots, y^{n-1}) = \Delta R^2,$$

wo die ganze rationale Funktion R von x offenbar der Diskriminante der Substitution gleich ist, durch die die Basen $(1, y, \ldots y^{n-1})$ und $(f_0, f_1, \ldots f_{n-1})$ zusammenhängen. R^2 ist der außerwesentliche Diskriminantenteiler von y. Δ ist der *größte gemeinsame Teiler* der Diskriminanten aller ganzen Größen von $K(y, x)$. Über die Fundamentaldiskriminante (Diskriminante der Fundamentalgleichung) s. Nr. **19.**

Der außerwesentliche Diskriminantenteiler der Gleichung $F(y, x) = 0$, der eine ganze algebraische Funktion y von x genügt, läßt sich auch charakterisieren als der größte von U, V unabhängige Teiler von

$$N\left(U \cdot \frac{\partial F(y,x)}{\partial y} + V \cdot \frac{\partial F(y,x)}{\partial x}\right).$$

Kronecker untersucht weiter die Verallgemeinerung der obigen Begriffsbildungen auf reduzible Gleichungen (Discr., p. 315—319) sowie auf die gebrochenen Größen der Körper (Discr., p. 327—329).

In der *Weierstraß*schen Vorlesung von 1869 (*B.-N.*, p. 375—376) werden die Begriffe des wesentlichen und des außerwesentlichen Diskriminantenteilers an die irreduzible Gleichung, der eine, im allgemeinen gebrochene Funktion des Körpers genügt, angeknüpft und mit Hilfe der Reihenentwicklungen analysiert. *Klein*, R. F. I, p. 118—121, bespricht die geometrische Bedeutung des wesentlichen und des außerwesentlichen Diskriminantenteilers. Vgl. außerdem für die geometrische Bedeutung des Diskriminantenteilers *B.-N.*, p. 389, 391. [*O*]

P_k erstreckte Produkt:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) = \prod_{(P_k)} (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_k)^{k-1} \qquad (\mathfrak{D}, \mathfrak{n}_x) = 1 \tag{68}$$

dargestellt.

In jedem Körper K gibt es unendlich viele primitive Elementenpaare (ξ, η), deren Gleichung $G(\xi, \eta) = 0$ eine reguläre Kurve ergibt. Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem anderen, daß jede Kurve durch eine endliche Anzahl von rationalen Elementartransformationen umkehrbar eindeutig in eine reguläre Kurve übergeführt werden kann. In der Tat zeigt man leicht, daß durch geeignete Elementartransformationen der Exponent irgend eines Primteilers $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{D}$ auf Null reduziert werden kann, und daß bei jenen Transformationen zu $\mathfrak{D}$ nur solche Faktoren $(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_l)^{l-1}$ hinzutreten, welche l-fachen Punkten mit getrennten Tangenten entsprechen. Dieses Verfahren, welches als *Auflösung der Singularitäten* bezeichnet wird, kann auch dazu dienen, für die ursprüngliche Kurve den Divisor der Doppelpunkte zu berechnen.[57])

Anstatt aber die Singularitäten einer vorgelegten Kurve $F(y,x)=0$ so sukzessive durch passend gewählte Abbildungen auf andere Kurven aufzulösen, kann man direkt zeigen, daß man unter Festhaltung von x die andere Variable y auf unendlich viele Arten durch ein anderes primitives Element η des Körpers so ersetzen kann, daß die neue Kurve $\Phi(\eta, x) = 0$ der anderen eindeutig entspricht und sogar nur gewöhnliche im Endlichen liegende Doppelpunkte hat, daß also jedem ihrer einzelnen Punkte P nur ein Teiler zweiten Grades $(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2)$ entspricht, $\mathfrak{D}$ also lauter verschiedene Primfaktoren enthält.

Zu diesem Zwecke wähle ich den Grad q von η beliebig, aber größer als w_x und schreibe den Nenner $\mathfrak{n}_\eta = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_q$ beliebig aber so vor, daß auf der *Riemann*schen Fläche $\mathfrak{K}_x$ die zugehörigen Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_q$ und ihre in Bezug auf x konjugierten Punkte unverzweigt, und daß auch keine zwei von ihnen einander konjugiert sind. Dann kann man auf unendlich viele Arten einen Zähler $\mathfrak{z}_\eta$ so bestimmen, daß die der Variablen $\eta = \frac{\mathfrak{z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta}$ zugehörige Kurve $\Phi(\eta, x) = 0$ nur Doppelpunkte im Endlichen besitzt.

In der Tat, sei $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(n)})$ ein für die Stelle $(x = \infty)$ reguläres Fundamentalsystem für das Ideal $J\left(\frac{1}{\mathfrak{n}_\eta}\right)$, so sind die Ordnungszahlen $-\sigma_i$ der Elemente $\eta^{(i)}$ für die Stelle $(x = \infty)$ sämtlich ne-

57) Literaturangaben zu dieser ersten Auflösungsmethode bei *B.-N.*, p. 376—380. [*O*]

gative ganze Zahlen; alle Elemente η mit dem Nenner $\mathfrak{n}_\eta$ sind also in der Form:

$$\eta = u_1\eta^{(1)} + u_2\eta^{(2)} + \cdots + u_n\eta^{(n)} \tag{69}$$

enthalten, wo allgemein der Koeffizient

$$u_i = u_i^{(0)} + u_i^{(1)}x + \cdots + u_i^{(\sigma_i)}x^{\sigma_i}$$

eine ganze Funktion des σ_i^{ten} Grades von x mit unbestimmten Koeffizienten ist. Durch zweckmäßige Wahl der höchsten Koeffizienten $u_i^{(\sigma_i)}$ erreicht man zunächst, daß η für die Stelle $(x = \infty)$ endliche und voneinander verschiedene Werte enthält, daß also hier kein singulärer Punkt von $\mathfrak{C}_\eta$ auftritt.

Sei nun $\Phi(\eta, x) = 0$ die Gleichung, der die Form (69) zunächst für unbestimmte u_i genügt, und

$$\Phi(\eta, x) = \Phi_1(\eta, x)\Phi_2(\eta, x)\ldots\Phi_\nu(\eta, x) \tag{70}$$

die Zerlegung ihrer linken Seite in irreduktible Faktoren für den Bereich einer beliebigen endlichen Stelle $\mathfrak{p}$ $(x = \alpha)$, so folgt aus der Gleichung:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_1} = \dot{\Phi}_1'(\eta_1, x)\Phi_2(\eta_1, x)\ldots\Phi_\nu(\eta_1, x) \tag{70a}$$

durch Diskussion der rechts auftretenden Linearfaktoren, daß für *un bestimmte* u_i alle ν oben in (64) auftretenden Exponenten $l_{11}, l_{12}, \ldots l_{1\nu}$ Null sind, daß also alle unendlich vielen Kurven $\Phi(\eta, x) = 0$ nicht etwa einen *festen* Doppelpunkt gemeinsam haben können. Ferner geht ebenfalls aus der Untersuchung der einzelnen Linearfaktoren von (70a) hervor, daß, falls es durch zweckmäßige Wahl einer Konstanten $u_x^{(i)}$ bewirkt ist, daß die Kurve $\Phi = 0$ an einer bestimmten Stelle einen singulären Punkt hat, die übrigen stets so gewählt werden können, daß der zugehörige Primdivisor $\mathfrak{P}$ ein einfacher Teiler von $\mathfrak{D}$ ist, also einem gewöhnlichen Doppelpunkt entspricht.

Geht man also in der Gleichung (70a) zur Norm über und beachtet (67), so ergibt sich für unbestimmte $u_i^{(x)}$ eine Gleichung:

$$D(\Phi) = N(\mathfrak{D}_\Phi)N(\mathfrak{F}_x) = U^2(u_x^{(i)})N(\mathfrak{F}_x), \tag{71}$$

und nach dem oben Bewiesenen ist $U(u_x^{(i)}) = \sqrt{N(\mathfrak{D}_\Phi)}$ eine primitive rationale Form, welche für unbestimmte $u_x^{(i)}$ keinen einzigen quadratischen Faktor besitzt. Wählt man also, was auf unendlich viele Arten geschehen kann, diese Konstanten so, daß auch für sie $U(u_x^{(i)})$ nur ungleiche Linearfaktoren hat, so besitzt für das so bestimmte η die Kurve $\Phi(\eta, x) = 0$ wirklich lauter gewöhnliche Doppelpunkte.[58])

58) Die Auflösung der Singularitäten einer ebenen Kurve ist zuerst von *Kronecker* gegeben, jedoch erst 1881 veröffentlicht worden (Discr., p. 301—305, 326, vgl. auch *B.-N.*, p. 370—375). Durch die von *Kronecker* veröffentlichte Methode,

26. Die zu einer Gleichung $F(x,y)$ gehörigen Funktionenringe. Sind x und y zwei beliebige Elemente des Körpers K, so konstituiert die Gesamtheit $R(x, y)$ aller ganzen rationalen Funktionen von x und y einen Teilbereich von K, welcher nach *Dedekind* eine *Ordnung*, nach Hilbert ein *Ring* genannt wird. Die Addition, Subtraktion und Multiplikation der Funktionen eines Ringes liefert wieder Elemente desselben; für die Division ist dies im allgemeinen nicht der Fall. Ist $G(x, y) = \frac{\mathfrak{d}_G}{\mathfrak{n}_G}$ die Zerlegung eines solchen Ringelementes in seine Primfaktoren, so bestimmt der Zähler das Schnittpunktsystem der Kurve $G = 0$ mit der Grundkurve $F = 0$; die Untersuchung solcher Schnittpunktsysteme führt mit Notwendigkeit auf die Betrachtung von Funktionsringen. Die Frage, ob ein gegebenes Element η des Körpers $K(x, y)$ dem Ringe $R(x, y)$ angehört oder nicht, wird durch den folgenden wichtigen Satz beantwortet:

Wenn die zwischen x und y bestehende irreduktible Gleichung $F(x, y) = 0$ in bezug auf jene Variablen bzw. vom m^{ten} und n^{ten} Grade ist, und $\mathfrak{D}$ den Divisor ihrer Doppelpunkte bedeutet, so gehört jedes Multiplum von $\mathfrak{D}$ dem Ringe $R(x, y)$ an. Allgemeiner gehört auch jedes Multiplum von $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{n}_x^\mu \mathfrak{n}_y^\nu}$ für $\mu < m$ und $\nu < n$ ebenfalls zu $R(x, y)$, und zwar ist es in bezug auf x und y bzw. vom μ^{ten} und ν^{ten} Grade.

Der Beweis beruht auf dem wichtigen Hilfssatze, welcher später (Nr. 41) auch für den Beweis des *Abel*schen Theorems von grundlegender Bedeutung ist:

Ist der Nenner einer Funktion

$$\varphi = \frac{\mathfrak{Z}_\varphi}{\mathfrak{Z}_x \mathfrak{n}_x^\mu} \tag{72}$$

das Produkt aus dem Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_x$ und einer nicht negativen Potenz von $\mathfrak{n}_x$, so ist ihre Spur eine ganze Funktion μ^{ten} Grades von x.

---

die sich im wesentlichen mit der im Text zuletzt angegebenen deckt, werden jedoch im allgemeinen nur die im Endlichen liegenden singulären Punkte aufgelöst, da in ihr als neue Variable für y eine *ganze* Funktion von x eingeführt und daher an ein Fundamentalsystem für *ganze* Größen des Körpers angeknüpft wird. Die im Text angegebene Methode zuerst bei *H.-L.*, p. 402—409. Die *Kroneckers*che Methode benutzt die Reihenentwicklungen nicht und kann daher zum Existenzbeweis für Reihenentwicklungen verwendet werden. Die von *Weierstraß* mit Hilfe von Reihenentwicklungen erhaltenen Resultate gebraucht *Thomé* (J. f. Math. 126, p. 95) zur Auflösung der Singularitäten. [*O*]

Ist zum Beispiel:

$$u = \int \varphi\, dx \tag{72a}$$

irgendein Integral erster Gattung, also $\varphi = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{n}^2_x}{\mathfrak{Z}_x}$, so folgt aus der Gleichung:

$$\varphi \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = \mathfrak{G}\frac{\mathfrak{n}^2_x}{\mathfrak{Z}_x} \cdot \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}^m_x \mathfrak{n}^{n-2}_y} = \mathfrak{G} \cdot \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{n}^{m-2}_x \mathfrak{n}^{n-2}_y} = g(\mathfrak{n}^{m-2}_x, \mathfrak{n}^{n-2}_y) \tag{72b}$$

daß dieses Produkt eine ganze Funktion des Ringes, daß also jeder Integrand erster Gattung in der Form:

$$\varphi = \frac{g(x, y)}{F'_y} \tag{72c}$$

dargestellt werden kann, deren Zähler eine ganze Funktion des $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades in x, des $(n-2)^{\text{ten}}$ in y ist, welche durch $\mathfrak{D}$ teilbar ist, so daß die sog. *adjungierte* Kurve $g(x, y) = 0$ in diesem präziseren Sinne durch die singulären Punkte der Grundkurve hindurchgehen muß, wenn $\frac{g}{F'_y}$ einen Integranden erster Gattung liefern soll.

27. Darstellung der zum Körper K gehörigen Kurven durch homogene Koordinaten. Nach (48) ff., p. 572, besteht zwischen drei beliebigen linear unabhängigen äquivalenten Divisoren $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2$ stets eine homogene irreduktible Gleichung:

$$\Phi(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = 0 \tag{73}$$

mit konstanten Koeffizienten, deren Dimension gleich dem Grade n der Klasse $A = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ ist, und welche z. B. in bezug auf $\mathfrak{D}_0$ bis zum Grade von $\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{D}_2}$ ansteigt, usw. Sind speziell:

$$x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}} \tag{74}$$

drei beliebige, linear unabhängige Elemente des Körpers, welche so ausgewählt sind, daß $K(x_0, x_1, x_2) = K(x, y)$ ist, und ist $F(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = 0$ die zwischen ihnen bestehende irreduktible Gleichung, so ist auch

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

die Gleichung einer algebraischen Kurve des Körpers $K(x, y)$ in homogenen Koordinaten, bezogen auf das Koordinatendreieck ($x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$), dessen Seiten die Grundkurve in denjenigen Punkten schneiden, welche den Primteilern von $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ zugeordnet sind. Ist $G(x_0, x_1, x_2) = 0$ eine andere Kurve m^{ten} Grades, so liefert der ganze Divisor mn^{ten} Grades $G(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ die mn Schnittpunkte dieser Kurve mit der Grundkurve $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Speziell bestimmen die Divisoren der Schar $c_0\mathfrak{A}_0 + c_1\mathfrak{A}_1 + c_2\mathfrak{A}_2$ die Schnittpunkte aller Geraden

$c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ der Ebene mit der Grundkurve. Einer Transformation:

$$\mu y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 0, 1, 2) \tag{75}$$

der homogenen Koordinaten mit nicht verschwindender Determinante $|a_{ik}|$ entspricht die Substitution:

$$\mathfrak{B}_i = \sum_k a_{ik} \mathfrak{A}_k, \tag{75a}$$

bei welcher die Basis $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ der Divisorenschar $c_0 \mathfrak{A}_0 + c_1 \mathfrak{A}_1 + c_2 \mathfrak{A}_2$ durch die äquivalente Basis $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ ersetzt wird.

Sind allgemeiner vier linear unabhängige Funktionen x_0, x_1, x_2, x_3 innerhalb K so gegeben, daß

$$K(x_0, x_1, x_2, x_3) = K(x, y)$$

ist, so entspricht jedem Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche ein Punkt P einer algebraischen Raumkurve R mit den Tetraederkoordinaten (x_0, x_1, x_2, x_3), und diese Beziehung ist im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme einzelner Punkte eindeutig. Ist allgemein:

$$x_i = \frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}} \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

die Divisorendarstellung jener vier Funktionen, deren Zähler also ganze teilerfremde Divisoren derselben Klasse A sind, und ist n die Ordnung von A, so schneidet jede Fläche $G(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ die Kurve R in allen und nur den Punkten, welche dem Divisor: $G(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ entsprechen. Speziell schneidet jede Ebene $c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$ diese Kurve in den n Punkten, welche dem ganzen Divisor n^{ter} Ordnung $c_0 \mathfrak{A}_0 + c_1 \mathfrak{A}_1 + c_2 \mathfrak{A}_2 + c_3 \mathfrak{A}_3$ zugeordnet sind. Die Kurve R hat also die Ordnung n.

Sind endlich ganz allgemein: $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_s$ $(s+1)$ linear unabhängige Divisoren einer Klasse A und $x_0, x_1, \ldots x_s$ die ihnen bei irgendeiner Wahl des Multiplikators $\mathfrak{A}$ zugeordneten Funktionen des Körpers, so wird durch die Proportion:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_s = \mathfrak{A}_0 : \mathfrak{A}_1 : \ldots : \mathfrak{A}_s$$

eine Kurve R_s im Raume von s Dimensionen bestimmt. Diese Kurve kann in keinem Raum niedrigerer Dimension gelegen sein, weil zwischen den x_i keine lineare homogene Gleichung besteht; ihre Ordnung ist, wie genau wie vorher bewiesen wird, gleich der Ordnung der Klasse A, vorausgesetzt, daß der Körper $K(x_0, x_1, \ldots x_s)$ gleich $K(x, y)$ ist.

Die Divisoren $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_s)$ können ebenso wie vorher im Falle der ebenen Kurve durch lineare Gleichungen von der Form:

$$\mathfrak{B}_i = \sum_k a_{ik} \mathfrak{A}_k$$

transformiert werden. Eine solche Substitution entspricht einer Ver-

legung des Koordinatentetraeders oder einer kollinearen räumlichen Abbildung der Kurve.[59])

Wir beschäftigen uns zunächst mit den ebenen Kurven des Körpers $K(x, y)$, bemerken aber, daß die hier abgeleiteten Resultate auch auf die Kurven in höheren Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden können.

Ein Punkt $P = (a_0, a_1, a_2)$ der Ebene liegt stets und nur dann auf der Grundkurve, wenn die drei Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2 \\ \mathfrak{A}_0, & \mathfrak{A}_1, & \mathfrak{A}_2 \end{pmatrix}$$

einen gemeinsamen Teiler $\mathfrak{K}$ enthalten. P ist ein k facher $\varkappa$-zweigiger Punkt der Kurve, wenn $\mathfrak{K}$ von der k^{ten} Ordnung ist und $\varkappa$ verschiedene Primfaktoren enthält, wenn also

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{P}_1^{h_1} \mathfrak{P}_2^{h_2} \dots \mathfrak{P}_\varkappa^{h_\varkappa}$$

und $h_1 + h_2 + \dots + h_\varkappa = k$ ist.

Man erhält die zu den $\varkappa$ Zweigen von P zugehörigen Tangenten, wenn man in dem Büschel

$$\begin{vmatrix} b_0 + \lambda c_0, & b_1 + \lambda c_1, & b_2 + \lambda c_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

59) Es werde hier kurz auf den Zusammenhang der *Klein*schen Formentheorie mit der Divisorentheorie eingegangen: Ist $z = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}$ die unabhängige Variable, und spaltet man sie in einen Quotienten von x_1 und x_2, so daß $z = \frac{x_1}{x_2}$ ist, so verschwindet x_1 in allen Punkten von $\mathfrak{Q}_1$, x_2 in allen Punkten von $\mathfrak{Q}_2$. Ist A die Klasse von $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$, so entspricht jedem ganzen Divisor von A^r $(r > 0)$ eine Form r^{ter} Dimension, die gerade in den Punkten jenes Divisors verschwindet. Jede Funktion des Körpers ist dann als Quotient von zwei ganzen Formen darstellbar. Läßt sich ein ganzer Divisor ganz und rational in $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ darstellen, so ist die entsprechende Form *rational* in x_1, x_2. Den übrigen Divisoren der Klassen A^r entsprechen *algebraische* Formen. Benutzt man die Formentheorie und unterscheidet nicht zwischen rationalen und algebraischen Formen, so kommt dies auf die Auszeichnung der Klasse A hinaus. Unterscheidet man zwischen rationalen und algebraischen Formen, so wird die *Teilschar* $c_1 \mathfrak{Q}_1 + c_2 \mathfrak{Q}_2$ von A ausgezeichnet. Vgl. für die Einführung der Formentheorie *Hensel,* Jahresber. d. D. M. V., 1 (1892), p. 4, J. f. Math. 109 (1892), p. 56, Acta Math. 18 (1894), p. 247 ff. und besonders *Klein,* R. F. I, p. 100—101, 114—117, 122—136, 142—148. Ebenda p. 173—185 behandelt *Klein* auch rationale und algebraische Formen mit mehr als zwei Variabeln. Im Anschluß daran behandelt dann *Klein* die Fragestellung, sämtliche Kurven, die zur vorgegebenen *Riemann*schen Fläche (oder arithmetisch zum vorgegebenen Körper) gehören, herzustellen und zu untersuchen. R. F. I, p. 179—181; II p. 63—66, 78 ff., p. 115—117. [*O*]

der durch P gehenden Strahlen den Parameter λ so bestimmt, daß der Divisor:

$$\begin{vmatrix} b_0 + \lambda c_0, & b_1 + \lambda c_1, & b_2 + \lambda c_2 \\ a_0 \quad , & a_1 \quad , & a_2 \\ \mathfrak{A}_0 \quad , & \mathfrak{A}_1 \quad , & \mathfrak{A}_2 \end{vmatrix}$$

je einen der $\varkappa$ Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$ öfter als $\mathfrak{R}$ enthält.

Sind $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_1:\mathfrak{A}_2}$, $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_2:\mathfrak{A}_0}$, $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_0:\mathfrak{A}_1}$ die zu den Körperfunktionen $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}$, $\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0}$, $\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_1}$ gehörigen Verzweigungsteiler, so ist allgemein:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\overline{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_{i+1}:\mathfrak{A}_{i+2}}}{\mathfrak{A}^{n-1}} \qquad (i \equiv 0, 1, 2 \pmod 3) \tag{76}$$

$$\frac{\partial F(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)}{\partial \mathfrak{A}_i} = \overline{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_{i+1}:\mathfrak{A}_{i+2}}, \tag{76a}$$

wo hier wie im folgenden die Indizes stets durch ihre kleinsten Reste modulo 3 zu ersetzen sind. Der so bestimmte ganze Divisor $\overline{\mathfrak{D}}$ ist *der Divisor der Doppelpunkte im projektiven Sinne.*

Ein Kurvenpunkt P ist nämlich dann und nur dann singulär, wenn seine Primfaktoren $\mathfrak{P}_i$ in $\overline{\mathfrak{D}}$ vorkommen, und sie treten auch hier in einer bestimmten von der Beschaffenheit der Singularität abhängigen Multiplizität auf.

Da jeder der Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}$ vom Grade $2(p + n - 1)$ ist, und die in (76a) links stehenden Divisoren den Grad $n(n-1)$ besitzen, so ergibt sich für den halben Grad $\bar{d}$ von $\overline{\mathfrak{D}}$ die Gleichung:

$$\bar{d} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - p, \quad p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \bar{d}. \tag{77}$$

Für den Fall gewöhnlicher Doppelpunkte ist $\bar{d}$ die Anzahl derselben, und man erhält also das Geschlecht der Kurve, wenn man die Anzahl der wirklich vorhandenen Doppelpunkte von der Maximalzahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ abzieht, welche eine irreduktible Kurve n^{ter} Ordnung haben kann.

Ist $C = (c_0, c_1, c_2)$ ein beliebiger Punkt der Ebene, also

$$\Delta_C(F) = c_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + c_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \tag{78}$$

die Gleichung der ersten Polare von C in bezug auf die Grundkurve, so wird ihr Schnittpunktssystem mit der Grundkurve durch den Zählerdivisor von $\Delta_C(F)$

$$c_0 \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{A}_0} + c_1 \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{A}_1} + c_2 \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{A}_2} = \overline{\mathfrak{D}}(c_0 \mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_1:\mathfrak{A}_2} + c_1 \mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_2:\mathfrak{A}_0} + c_2 \mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_0:\mathfrak{A}_1}) \tag{78a}$$

repräsentiert, und aus dieser Darstellung folgt der Satz:

> Das Netz aller ersten Polaren schneidet auf der Grundkurve Punktsysteme aus, welche einen festen, dem Divisor $\overline{\mathfrak{D}}$ genau entsprechenden Bestandteil besitzen.

Der Divisor $\overline{\mathfrak{D}}$ der Doppelpunkte kann als Nenner eines auf die Kurve bezüglichen Differentialteilers definiert werden: Aus der Auflösung der beiden Gleichungen:

$$x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}+x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\quad dx_0\frac{\partial F}{\partial x_0}+dx_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial F}{\partial x_2}=0$$

folgt nämlich, daß das Differential:

$$(79)\qquad dM=\frac{x_1dx_2-x_2dx_1}{\frac{\partial F}{\partial x_0}}=\frac{x_2dx_0-x_0dx_2}{\frac{\partial F}{\partial x_1}}=\frac{x_0dx_1-x_1dx_0}{\frac{\partial F}{\partial x_2}}$$

zu dem Differentialteiler $\frac{\mathfrak{A}^{n-3}}{\overline{\mathfrak{D}}}$ gehört, wenn $\mathfrak{A}$ der Generalnenner von x_0, x_1, x_2 ist. Bedeuten also (a_0, a_1, a_2) beliebige Konstanten, so folgt aus den vorigen Gleichungen der allgemeinere Ausdruck für dasselbe Differential:

$$(79a)\qquad dM=\frac{\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2\\ x_0 & x_1 & x_2\\ dx_0 & dx_1 & dx_2\end{vmatrix}}{a_0\frac{\partial F}{\partial x_0}+a_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial F}{\partial x_2}}\sim\frac{\mathfrak{A}^{n-3}}{\overline{\mathfrak{D}}}.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich einmal, daß der Divisor $\frac{\mathfrak{A}^{n-3}}{\overline{\mathfrak{D}}}$, also auch sein Nenner, der Divisor der Doppelpunkte, bei beliebiger linearer Transformation des Koordinatensystemes ungeändert bleibt, weil dasselbe von dem Ausdrucke (79a) von dM gilt. Ferner folgt aus derselben Gleichung sofort, daß das allgemeinste auf die Kurve $F=0$ bezügliche Abelsche Integral in der von *Aronhold* eingeführten Form:

$$(80)\qquad I=\int\theta(x_0,x_1,x_2)\frac{\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2\\ x_0 & x_1 & x_2\\ dx_0 & dx_1 & dx_2\end{vmatrix}}{a_0\frac{\partial F}{\partial x_0}+a_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial F}{\partial x_2}}=\int\theta(x_0,x_1,x_2)\,dM$$

dargestellt werden kann, in welcher θ eine beliebige ganze oder gebrochene Funktion der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung ist; denn so wird der zugehörige Differentialteiler

$$(80a)\qquad dI\sim\frac{\theta(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)}{\overline{\mathfrak{D}}}$$

von dem akzessorischen Nenner $\mathfrak{A}$ unabhängig.

Die Übertragung der in Nr. 26 gefundenen Resultate auf die durch die Gesamtheit aller ganzen homogenen Funktionen von x_0, x_1, x_2 konstituierten Funktionenringe ergibt leicht das folgende Resultat:

Eine Funktion des Körpers, welche ein Vielfaches des Divisors $\frac{\overline{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{A}^\nu}$ ist, ist als ganze homogene Funktion ν^{ter} Ordnung von (x_0, x_1, x_2) darstellbar,

oder in anderer Form ausgesprochen:

Bedeutet A die Klasse der ganzen Divisoren $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, so kann jeder Divisor der Klasse A^ν, welcher ein Multiplum von $\overline{\mathfrak{D}}$ ist, als ganze homogene Funktion ν^{ter} Ordnung von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ dargestellt werden.[60])

Eine homogene Gleichung ν^{ter} Ordnung $\Phi_\nu(x_0, x_1, x_2) = 0$, deren Zählerdivisor $\Phi_\nu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ durch $\overline{\mathfrak{D}}$ teilbar ist, stellt eine durch die Doppelpunkte der Grundkurve hindurchgehende Kurve dar, welche auch hier eine zu jener *adjungierte Kurve* genannt wird.

Ist wieder A die durch die Zählerdivisoren $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ von (x_0, x_1, x_2) konstituierte Klasse, so heißt von zwei ganzen Divisoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ jeder *ein Rest* des anderen, in bezug auf die Grundkurve $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, wenn das Produkt $\overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ ein Divisor irgendeiner der Klassen A^m, also nach dem soeben angegebenen Satze in der Form $\Psi_m(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ einer ganzen homogenen Funktion irgendeiner m^{ten} Ordnung von $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ darstellbar ist. Dann ist also das dem Divisor $\overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ entsprechende Punktsystem der vollständige Schnitt der Grundkurve und der adjungierten Kurve $\Psi(x_0, x_1, x_2) = 0$.

Die auf p. 570 eingeführte Klasseneinteilung der algebraischen Divisoren modulo A gibt ein Mittel, die Beziehungen aller Reste in bezug auf die Grundkurve einfach auszusprechen: Sind nämlich $\overline{D}_A$, R_A, S_A die Klassen, welche alle zu $\overline{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ modulo A äquivalenten Divisoren enthalten, so besteht zwischen ihnen die Gleichung:

$$R_A S_A = \overline{D}_A^{-1}. \tag{81}$$

Von zwei solchen Klassen R_A und S_A soll jede die *Residualklasse* der anderen genannt werden. Zwei ganze Divisoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ heißen nun *korresidual*, wenn sie beide Reste eines und desselben Divisors $\mathfrak{S}$ sind. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ beide der Residualklasse R_A zu der durch $\mathfrak{S}$ bestimmten Klasse S_A angehören.

Die Gesamtheit aller zu einem beliebigen Divisor R korresidualen Divisoren bilden alle ganzen Divisoren der zugehörigen Klasse R_A.

Hieraus folgt unmittelbar der Satz, welcher eine der fruchtbarsten Quellen für die Ergründung der Eigenschaften der auf höheren algebraischen Kurven gelegenen Punktgruppen bildet:

Sind vier ganze Divisoren $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ so beschaffen, daß durch die drei zu den Divisoren $\mathfrak{R}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{R}'\mathfrak{S}$ gehörigen Punktgruppen

60) Zur Fragestellung in der Sprache der Formentheorie vgl. *Klein*, R. F. I, p. 175—179. [*O*]

je eine adjungierte Kurve bestimmt wird, so wird auch durch $\mathfrak{R}'\mathfrak{S}'$ eine adjungierte Kurve festgelegt.

Unter dieser Voraussetzung sind nämlich $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ korresidual zu $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ korresidual zu $\mathfrak{R}$.

28. Die Differentialteiler einer Divisorenschar und ihre Anwendung in der Geometrie. Die Plückerschen Formeln.[61]) Sind (x_0, x_1, x_2) die homogenen Punktkoordinaten einer ebenen Kurve, so sind die Linienkoordinaten ihrer Tangente im Punkte $P = (x_0, x_1, x_2)$ die drei Unterdeterminanten zweiter Ordnung der Matrix:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \frac{dx_0}{d\xi} & \frac{dx_1}{d\xi} & \frac{dx_2}{d\xi} \end{pmatrix}, \tag{82}$$

wenn ξ irgendeine Funktion des Körpers ist, welche wir als unabhängige Variable wählen; denn diese Linie verbindet ja P mit einem benachbarten Kurvenpunkte. Soll P ein Wendepunkt der Kurve sein, so muß für ihn:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \frac{dx_0}{d\xi} & \frac{dx_1}{d\xi} & \frac{dx_2}{d\xi} \\ \frac{d^2x_0}{d\xi^2} & \frac{d^2x_1}{d\xi^2} & \frac{d^2x_2}{d\xi^2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sein.}^{62}) \tag{82a}$$

Sind allgemeiner (x_0, x_1, x_2, x_3) die homogenen Koordinaten des Punktes P einer Raumkurve R, so sind die *Plücker*schen Linienkoordinaten ihrer Tangente in P, d. h. der Verbindungslinie von P mit einem benachbarten Kurvenpunkte proportional den sechs Determinanten zweiter Ordnung der Matrix:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{dx_0}{d\xi} & \frac{dx_1}{d\xi} & \frac{dx_2}{d\xi} & \frac{dx_3}{d\xi} \end{pmatrix}. \tag{82b}$$

Ebenso sind die homogenen Koordinaten ihrer Schmiegungsebene in P, welche durch P und zwei benachbarte Kurvenpunkte hindurchgeht, die vier Unterdeterminanten dritter Ordnung der Matrix:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{dx_0}{d\xi} & \frac{dx_1}{d\xi} & \frac{dx_2}{d\xi} & \frac{dx_3}{d\xi} \\ \frac{d^2x_0}{d\xi^2} & \frac{d^2x_1}{d\xi^2} & \frac{d^2x_2}{d\xi^2} & \frac{d^2x_3}{d\xi^2} \end{pmatrix}. \tag{82c}$$

61) Die Methoden dieses Abschnittes wurden teilweise *H.-L.*, p. 438—459 angegeben. Vollständig dargelegt *Hensel*, Über die Invarianten algebraischer Körper, J. f. Math. 149 (1919), p. 125—146.

62) *G. Landsberg* (J. f. Math. 131 [1906], p. 152 ff.) gibt die Divisorendarstellung der *Hesse*schen Determinante, die zur Kurve gehört, und vergleicht sie mit der Divisorendarstellung von Δ. [*O*]

Soll endlich die Schmiegungsebene in P vier konsekutive Punkte mit R gemeinsam haben, soll sie also eine Wendeberührungsebene der Kurve sein, so muß für P die Gleichung:

$$\left|\frac{d^i x_k}{d\xi^i}\right| = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3) \tag{82d}$$

erfüllt sein.

Genau entsprechende Überlegungen gelten für algebraische Kurven im Raume von s Dimensionen. Die hier auftretenden Funktionen (82)—(82d) gehören alle dem Körper $K(x, y)$ an, unterscheiden sich aber von den früher betrachteten dadurch, daß sie auch die Ableitungen der in ihnen auftretenden Funktionen enthalten.

Um die allgemeinsten Funktionen dieser Art zu umfassen, legen wir $(s+1)$ Funktionen des Körpers $(x_0, x_1, \dots x_s)$ zugrunde; ist dann ξ irgendeine nicht konstante Funktion desselben, so betrachten wir eine beliebige, z. B. eine ganze rationale Funktion der $(\varkappa+1)(s+1)$ Funktionen der folgenden Matrix:

$$\left(\frac{d^\lambda x_i}{d\xi^\lambda}\right) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & & x^s \\ \frac{dx_0}{d\xi} & \frac{dx_1}{d\xi} & \cdots & \frac{dx_s}{d\xi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^\varkappa x_0}{d\xi^\varkappa} & \frac{d^\varkappa x_1}{d\xi^\varkappa} & \cdots & \frac{d^\varkappa x_s}{d\xi^\varkappa} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \dots \varkappa \\ i = 0, 1, \dots s \end{pmatrix}, \tag{82e}$$

welche durch

$$F\left(\left(\frac{d^\lambda x_i}{d\xi^\lambda}\right)\right) \tag{82f}$$

bezeichnet werde, während der zugehörige Divisor $\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s)$ genannt werden soll. Allgemeiner untersuchen wir den größten gemeinsamen Teiler:

$$\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s) = \left(F^{(k)}\left(\frac{d^\lambda x_i}{d\xi^\lambda}\right)\right) \qquad (k = 1, 2, \dots) \tag{82g}$$

mehrerer derartiger Funktionen.

Alle hier zu betrachtenden Divisoren $\mathfrak{Q}$ besitzen die folgenden drei Eigenschaften, durch deren Benutzung ihre Bestimmung sehr erleichtert wird:

1) Sie sind Invarianten für die lineare Transformation der Elemente x_i, d. h. bei jeder umkehrbaren Koordinatentransformation

$$y_i = \Sigma a_{i\varkappa} x_\varkappa$$

bleibt $\mathfrak{Q}_\xi$ ungeändert, oder es ist

$$\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s) = \mathfrak{Q}_\xi(y_0, y_1, \dots y_s). \tag{83}$$

2) Sie sind Differentiationsinvarianten: Ersetzt man nämlich die Differentiationsvariable ξ durch ein anderes Element η des Kör-

pers, so bleibt $\mathfrak{Q}$ ungeändert, d. h. es ist

$$\mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s) = \mathfrak{Q}_\eta(x_0, x_1, \dots x_s). \tag{84}$$

3) Sie sind homogen von der nullten Dimension in bezug auf die x_i; ersetzt man nämlich jedes x_i durch μx_i, wo μ ein beliebiges Element des Körpers ist, so wird:

$$\mathfrak{Q}_\xi(\mu x_0, \mu x_1, \dots \mu x_s) = \mathfrak{Q}_\xi(x_0, x_1, \dots x_s). \tag{85}$$

Jeder nicht homogene Divisor $\mathfrak{Q}_\xi(x_0, \dots x_s)$ kann offenbar durch die Substitution $x_i = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_{s+1}}$ $(i = 0, 1, \dots s)$ in einen homogenen Divisor von $\bar{x}_0, \dots \bar{x}_s, \bar{x}_{s+1}$ verwandelt werden.

Um nun die in $\mathfrak{Q}_\xi(x_i)$ enthaltene Potenz eines beliebigen Primteilers $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, kann man, falls $\mathfrak{Q}$ eine Transformationsinvariante ist, das System $(x_0, x_1, \dots x_s)$ durch ein äquivalentes reguläres System $(\delta_0, \delta_1, \dots \delta_s)$ für diesen Punkt ersetzen (S. Nr. 15) und dann den Divisor $\mathfrak{Q}_\xi(\delta_0, \delta_1, \dots \delta_s)$ untersuchen. Ist zweitens $\mathfrak{Q}_\xi(\delta_i)$ eine Differentiationsinvariante, so kann man außerdem die Differentiationsvariable ξ durch eine Primfunktion π für diese Stelle ersetzen, d. h. den Divisor $\mathfrak{Q}_\pi(\delta_i)$ betrachten. Außerdem ist aber der Divisor $\mathfrak{Q}_\xi(x_i)$ bei dieser zweiten Voraussetzung von der Differentiationsvariablen ξ ganz unabhängig; es kann also $\mathfrak{Q}$ auch als abhängig von den Differentialen $(d^\varkappa x_i)$ allein angesehen werden. Ist endlich $\mathfrak{Q}_\xi(x_i)$ außerdem homogen von der nullten Dimension, also $\mathfrak{Q}_\xi(\mu x_i) = \mathfrak{Q}_\xi(x_i)$, und ersetzt man alle Elemente x_i durch die zugehörigen Divisorenquotienten $\frac{\mathfrak{Q}^{(i)}}{\mathfrak{Q}_0}$, so ist $\mathfrak{Q}_\xi$ von dem Generalnenner $\mathfrak{Q}_0$ ganz unabhängig, da bei der Wahl eines anderen Nenners $\mathfrak{Q}_0'$ $x_i' = \frac{\mathfrak{Q}^{(i)}}{\mathfrak{Q}_0'} = \mu x_i$ wird, wo $\mu = \frac{\mathfrak{Q}_0'}{\mathfrak{Q}_0}$ ein Element des Körpers ist. Unter dieser Voraussetzung kann also jener Divisor als abhängig allein von jenen Zählerdivisoren angesehen und durch $\mathfrak{Q}_\xi(\mathfrak{Q}^{(0)}, \mathfrak{Q}^{(1)}, \dots \mathfrak{Q}^{(s)})$ bezeichnet werden.

Diese Betrachtungen werden jetzt angewendet auf den größten gemeinsamen Teiler:

$$\left(\left(\begin{matrix} x_0 & x_1 & \dots & x_s \\ \frac{dx_0}{d\xi} & \frac{dx_1}{d\xi} & \dots & \frac{dx_s}{d\xi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^l x_0}{d\xi^l} & \frac{d^l x_1}{d\xi^l} & \dots & \frac{d^l x_s}{d\xi^l} \end{matrix}\right)\right) = \left(\left(\frac{d^\varkappa x_i}{d\xi^\varkappa}\right)\right) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1 \dots s \\ \varkappa = 0, 1 \dots l \end{pmatrix}$$

aller Determinanten $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $(l+1)$reihigen Matrix $\left(\frac{d^\varkappa x_i}{d\xi^\varkappa}\right)$. Derselbe ist, wie unmittelbar ersichtlich, eine Transformations-

invariante; er besitzt aber noch nicht die beiden letzten Invarianteneigenschaften. Ersetzt man nämlich die Differentiationsvariable ξ durch eine andere η, so multipliziert sich jene Matrix hinten mit einem Dreieckssystem, dessen Elemente von den Ableitungen erster, zweiter Ordnung von ξ und η abhängen und dessen Determinante gleich $\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^{\frac{l(l+1)}{2}}$ ist. Hieraus folgt, daß $\left(\left(\frac{d^\varkappa x_i}{d\xi^\varkappa}\right)\right) d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}}$ auch die zweite Invarianteneigenschaft besitzt. Ersetzt man endlich die x_i durch μx_i, so multipliziert sich jene Matrix hinten mit einem neuen Dreieckssystem von der Determinante μ^{l+1}; jener Divisor ist also homogen von der $(l+1)^{\text{ten}}$ Dimension, und es wird nach Division mit $\mathfrak{Z}_0^{l+1}$, wo $\mathfrak{Z}_0 = (x_0, x_1, \ldots x_s)$ den größten gemeinsamen Teiler der Elemente x_i bedeutet, homogen von der nullten Dimension.

Also besitzen die $s+1$ Divisoren

$$\Delta_l(x_0, x_1, \ldots x_s) = \frac{\left(\left(\frac{d^\varkappa x_i}{d\xi^\varkappa}\right)\right) d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}}}{\mathfrak{Z}_0^{l+1}} \quad \begin{pmatrix} i, l = 0, 1, \ldots s \\ \varkappa = 0, 1, \ldots l \end{pmatrix} \tag{86}$$

alle drei Invarianteneigenschaften. Sie können also auch in der folgenden Form geschrieben werden

$$\Delta_l(\mathfrak{Q}^{(0)}, \mathfrak{Q}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{Q}^{(s)}) = \left(\left(\begin{matrix} \mathfrak{Q}^{(0)}, & \mathfrak{Q}^{(1)}, & \ldots, \mathfrak{Q}^{(s)} \\ d\mathfrak{Q}^{(0)}, & d\mathfrak{Q}^{(1)}, & \ldots, d\mathfrak{Q}^{(s)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ d^l\mathfrak{Q}^{(0)}, & d^l\mathfrak{Q}^{(1)}, & \ldots, d^l\mathfrak{Q}^{(s)} \end{matrix}\right)\right), \tag{86a}$$

$$(l = 0, 1, \ldots s)$$

wenn $\mathfrak{Q}^{(0)}, \mathfrak{Q}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{Q}^{(s)}$ die Zählerdivisoren von $x_0, x_1, \ldots x_s$ bedeuten.

Um nun zu untersuchen, welche Potenz eines beliebigen Primteilers $\mathfrak{P}$ in $\Delta_l(x_i)$ enthalten ist, werde das System (x_i) durch ein äquivalentes reguläres System (δ_i) und zugleich die Differentiationsvariable ξ durch eine Primfunktion π für die Stelle $\mathfrak{P}$ ersetzt. Dann enthält der zu $d\pi$ gehörige Divisor $\mathfrak{P}$ nicht, alle Determinanten $(l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Matrix $\left(\frac{d^\varkappa \delta_i}{d\pi^\varkappa}\right)$ enthalten $\mathfrak{P}$ mindestens so oft wie ihre erste Determinante $|\delta_i^{(\varkappa)}|$ $(i, \varkappa = 0, 1, \ldots l)$, und dieser Exponent von $\mathfrak{P}$ kann leicht durch die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_l$ ausgedrückt werden, aus denen sich die Ordnungszahlen von $\delta_0, \delta_1, \ldots$ in Nr. **15** zusammensetzen. Hieraus ergibt sich sofort die folgende Darstellung jener Determinantenteiler:

$$((d^\varkappa x_i)) = \left(\left(\frac{d^\varkappa x_i}{d\xi^\varkappa}\right)\right) d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}} = \mathfrak{Z}_0^{l+1}\mathfrak{Z}_1^{l}\ldots\mathfrak{Z}_l \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots s \\ \varkappa = 0, 1, \ldots l \end{pmatrix}, \tag{87}$$

wo $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_l$ die Verzweigungsteiler (47a) der Schar (x_i) sind.

Diese Gleichungen liefern ein einfaches Mittel, die Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots \mathfrak{Z}_s$ der Schar (x_i) selbst durch die Invarianten $\Delta_\varkappa$ darzustellen: in der Tat folgt ja aus (87) unmittelbar:

$$\mathfrak{E}_l = \frac{((d^\varkappa x_i))}{((d^{\varkappa-1} x_i))} = \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}_1 \cdot \cdot \mathfrak{Z}_l \qquad (\varkappa = 0, 1, \dots l) \tag{88}$$

$$\mathfrak{Z}_l = \frac{\mathfrak{E}_l}{\mathfrak{E}_{l-1}} = \frac{\Delta_l(x_i)}{\Delta_{l-1}(x_i)}.$$

Aus den letzten Gleichungen geht hervor, daß die Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots \mathfrak{Z}_l$ ebenfalls alle drei Invarianteneigenschaften haben, während die $\mathfrak{E}_l$ zwar auch homogen, aber von der ersten Dimension sind. Man nennt die Quotienten $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \dots \mathfrak{E}_s$ der Determinantenteiler der Matrix $(d^\varkappa x_i)$ *die Differentialteiler nullter, erster, ... s^{ter} Ordnung* der Funktionenschar $(x_0, x_1, \dots x_s)$; es ergibt sich also der Satz:

Man erhält den Verzweigungsteiler l^{ter} Ordnung einer Funktionenschar, wenn man den Differentialteiler l^{ter} Ordnung durch den nächstvorhergehenden dividiert.

So gehört z. B. zu der Determinante $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ dx_0 & dx_1 \end{vmatrix}$ der Divisor $\mathfrak{Z}_0^2 \mathfrak{Z}_1$. Setzt man hier $x_0 = 1$, $x_1 = x$, so wird $\mathfrak{Z}_0 = (1, x) = \frac{1}{\mathfrak{n}_x}$, $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_x$, und man findet so wieder (vgl. p. 576 (52 b)), daß dem Differentiale $dx = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & dx \end{vmatrix}$ eines beliebigen Elementes x der Divisor $\mathfrak{Q}_{dx} = \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}$ entspricht.

Nun seien allgemein für einen bestimmten Index l $D_l^{(i)}$ alle $\binom{s+1}{l+1}$ Determinanten $(l+1)^{ter}$ Ordnung der $(l+1)$-reihigen Matrix

$$(d^\varkappa x_i) = \left(\frac{d^\varkappa x_i}{d\xi^\varkappa}\right) d\xi^{\frac{l(l+1)}{2}} \qquad \binom{i = 0, 1, \dots s}{\varkappa = 0, 1, \dots l} \tag{89}$$

in irgend einer Reihenfolge; ebenso werden die zugehörigen Divisoren bezeichnet. Da zu $d\xi$ ein Divisor $2(p-1)^{ten}$ Grades gehört, und die Determinanten $\left|\frac{d^\varkappa x_i}{d\xi^\varkappa}\right|$ alle zur Hauptklasse gehören, so sind alle Divisoren $D_l^{(i)}$ äquivalent und von der Ordnung $l(l+1)(p-1)$. Ferner seien $\mathfrak{T}_l^{(i)}$ die aus $D_l^{(i)}$ nach Division mit dem zugehörigen größten gemeinsamen Teiler $((d^\varkappa x_i))$ sich ergebenden ganzen Divisoren. Dann heißen diese $\binom{s+1}{l+1}$ ganzen äquivalenten Divisoren $\mathfrak{T}_l^{(i)}$ *die Tangentialkoordinaten l^{ter} Ordnung* der zur Schar $(x_0, x_1, \dots x_s)$ gehörigen s-dimensionalen Raumkurve, weil sie, wie gleich noch näher dargelegt wird, die naturgemäße Verallgemeinerung der Tangential- oder Linienkoordinaten einer ebenen Kurve sind. Nach (89) bestehen dann die Gleichungen:

$$D_l^{(i)} = (d^k x_i) \cdot \mathfrak{T}_l^{(i)} = \mathfrak{Z}_0^{l+1} \mathfrak{Z}_1^{l} \dots \mathfrak{Z}_l \mathfrak{T}_l^{(i)}. \tag{90}$$

Sind also $w_0, w_1, \ldots w_s$ und $n_0, n_1, \ldots n_s$ die Gerade der Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_i$ und der Tangentialkoordinaten $\mathfrak{T}_i$, so ist $n_0 = n$, $n_s = 0$, $w_0 = -n_0 = -n$, und aus der Vergleichung der Grade beider Seiten von (90) folgen die nachstehenden Gleichungen, welche für $s = 2$ die Verallgemeinerung der *Plückerschen Formeln* auf den Fall ganz beliebiger Singularitäten ergeben:

$$n_l + (l+1)w_0 + lw_1 + \cdots + w_l = l(l+1)(p-1) \tag{91}$$

oder:

$$(n_l - n_{l-1}) + (w_0 + w_1 + \cdots + w_l) = 2l(p-1) \tag{92}$$

oder endlich:

$$\begin{aligned} 2(p-1) &= n_1 - 2n_0 + w_1 \\ &= n_2 - 2n_1 + n_0 + w_2 \\ &= n_3 - 2n_2 + n_1 + w_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= -2n_{s-1} + n_{s-2} + w_s \end{aligned} \tag{93}$$

Für den speziellen Fall $s = 2$ sind $x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}$, $x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}$, $x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}$ die homogenen Koordinaten einer ebenen algebraischen Kurve, der Grad $n = n_0$ gleich der Ordnung der äquivalenten teilerfremden ganzen Divisoren $\mathfrak{A}_i$. Dann ist, wie eine sehr einfache geometrische Betrachtung zeigt, $\mathfrak{Z}_1$ der Divisor der Rückkehrpunkte, also w_1 die Anzahl derselben, $\mathfrak{Z}_2$ der Divisor der Wendepunkte, also w_2 ihre Anzahl; endlich sind $n_0 = n$ und n_1 die Ordnung und die Klasse der Kurve, während $n_2 = 0$, $w_0 = -n$ ist.

Die Formeln (91) gehen hier in die beiden fundamentalen, jetzt aber für jede Singularität gültigen *Plücker*schen Formeln über

$$\begin{aligned} w_1 &= 2p - 2 + 2n - n_1 \\ w_2 &= 3(2p - 2 + n) - 2w_1 = 3(n_1 - n) + w_1, \end{aligned} \tag{94}$$

aus denen die beiden dualen Formeln in bekannter Weise gefunden werden können.

29. Theorie der algebraischen Raumkurven.[62a]) Im Falle $s = 3$ seien $x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}$, $x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}$, $x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}$, $x_3 = \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}}$ die homogenen Koordinaten einer Raumkurve n^{ter} Ordnung $C_n^{(p)}$ vom Geschlechte p; dann haben also die äquivalenten Divisoren $\mathfrak{A}_i$ die Ordnung $n_0 = n$. Ein Punkt $P = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ gehört stets und nur dann der Kurve an,

62a) *M. H. Reimers* (Dissert. Kiel 1915) untersucht mit den Methoden der arithmetischen Theorie die Charakteristiken: 1. der ebenen Schnitte der Tangentenflächen von algebraischen Raumkurven, 2. der Perspektivkegel von algebraischen Raumkurven. [*O*]

wenn die Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ \mathfrak{A}_0, & \mathfrak{A}_1, & \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_3 \end{pmatrix}$$

einen gemeinsamen Teiler haben. Derselbe ist ein singulärer Punkt, wenn jener Divisor von höherer als der ersten Ordnung ist. Während zu einem Körper K im allgemeinen keine singularitätenfreien ebenen Kurven gehören, gibt es für ihn immer doppelpunktfreie Raumkurven. Hier ist $\mathfrak{Z}_1$ der Divisor der stationären *Punkte* oder der Rückkehrpunkte, $\mathfrak{Z}_2$ der Divisor der stationären Berührungs*geraden* oder der stationären Tangenten, $\mathfrak{Z}_3$ der Divisor der stationären Schmiegungs*ebenen*, oder der Wendeberührungsebenen; die Zahlen w_1, w_2, w_3 geben also im regulären Falle die Anzahlen jener stationären Elemente an, während für allgemeine Kurven diese Gebilde in der durch $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ charakterisierten Multiplizität zu zählen sind. Ferner bedeutet hier $n_0 = n$ den *Grad der Kurve*, d. h. die Anzahl der Kurvenpunkte auf einer beliebigen Ebene, n_1 ist der sog. *Rang* derselben, d. h. die Anzahl der Kurventangenten, welche durch eine beliebige Gerade gehen; n_2 gibt *die Klasse der Kurve*, nämlich die Anzahl ihrer Schmiegungsebenen durch irgendeinen Punkt im Raume; n_3 ist gleich Null.

Die Spezialisierung der Gleichungen (91) für $s = 3$ liefert hier die drei unabhängigen Verallgemeinerungen der *Plücker*schen Formeln:

$$\begin{aligned} n_1 &= 2(p-1) + 2n - w_1 \\ n_2 &= 6(p-1) + 3n - 2w_1 - w_2 \\ 0 &= 12(p-1) + 4n - 3w_1 - 2w_2 - w_3, \end{aligned} \tag{95}$$

und auch sie gelten für jede Raumkurve mit beliebigen Singularitäten.[63])

Zur Bestimmung des Divisors $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte einer Raumkurve $C_n^{(p)}$ führen die folgenden Betrachtungen: Projiziert man diese Kurve von einem beliebigen Punkte des Raumes auf eine Ebene, so erhält man eine ebene Kurve $\mathfrak{C}_0$, welche ihrerseits einen Divisor der Doppelpunkte $\mathfrak{D}_0$ besitzt. Dieser besteht aus zwei Teilen: einem, der mit dem Projektionszentrum variiert und den sog. *scheinbaren Doppelpunkten* von $C_n^{(p)}$ bei dieser Projektion entspricht, während der andere Teil $\mathfrak{D}$ von den wahren Singularitäten der Raumkurve abhängt und somit völlig unveränderlich ist. Dieser letztere ist somit der größte gemeinsame Teiler der Divisoren $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots$ der Doppelpunkte, welche zu allen Projektionen der Kurve gehören. Es gilt nun der folgende Satz:

63) Vgl. hierzu *H.-L.*, p. 465.

Der Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte einer Raumkurve kann stets als größter gemeinsamer Teiler der zu zweien ihrer Projektionen gehörigen Doppelpunktsdivisoren $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ dargestellt werden.

Auf dieser Tatsache beruht nun ein Satz, der eine direkte Verallgemeinerung des über Funktionsringe auf p. 596 ausgesprochenen ist und dessen Beweis auch unmittelbar auf diesen reduziert werden kann:

Sind $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ vier ganze linear unabhängige Divisoren einer Klasse A von der Ordnung n, und ist $\mathfrak{D}$ der zugehörige Divisor der Doppelpunkte, so kann jeder durch $\mathfrak{D}$ teilbare Divisor der Klasse A^ν als ganze homogene Funktion ν^{ter} Ordnung von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ dargestellt werden, vorausgesetzt, daß der Exponent ν oberhalb einer bestimmten unteren Grenze

$$\nu_0 = 2(n-3) - \frac{2(p-1+\delta)}{n} \tag{96}$$

liegt, wo 2δ die Ordnung des Divisors $\mathfrak{D}$ ist.

Oder in anderer Form:

Liegt ν oberhalb der Grenze ν_0, so kann jede durch $\mathfrak{D}$ teilbare Funktion des Körpers, deren Nenner die ν^{te} Potenz des Divisors $\mathfrak{A}$ ist, stets als ganze homogene Funktion ν^{ter} Ordnung von (x_0, x_1, x_2, x_3) dargestellt werden.

Besitzt die Raumkurve nur gewöhnliche Doppel- oder Rückkehrpunkte, so ergibt sich aus dieser Tatsache unmittelbar der folgende Satz:

Liegt ν oberhalb der soeben angegebenen Grenze ν_0, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Fläche ν^{ter} Ordnung die Raumkurve $C_n^{(p)}$ enthält, durch ein System von $(\nu n - \delta - p + 1)$ linearen unabhängigen Gleichungen für die Koeffizienten der Flächengleichung gegeben.[64])

Und da die Gleichung einer Fläche ν^{ter} Ordnung $\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Koeffizienten besitzt, so folgt weiter:

Die Gesamtheit aller Flächen ν^{ter} Ordnung, welche durch eine gegebene Raumkurve der Ordnung n und des Geschlechtes p hin-

64) Dieser Satz (für hinreichend große ν) folgt sofort aus dem *Riemann-Roch*schen Satz, findet sich jedoch zum erstenmal ausgesprochen und vollständig bewiesen bei *G. Castelnuovo*, Palermo Rendiconti VII (1893), p. 89—110. Mit der Bestimmung einer möglichst niedrigen Grenze ν_0, von der an er gilt, beschäftigen sich *M. Noether*, Ann. di Mat. (2) V (1871), p. 1—15, Berl. Abh. (1882); *Picard* et *Simart*, Théorie des fonctions algébriques de deux Variables indépendantes, t. I (Paris 1897), p. 223—235; *H.-L.*, p. 466—476. [*O*]

durchgelegt werden können, bildet bei hinreichend großem ν eine Schar der Dimension:

$$(97) \qquad N = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - \nu n + p + \delta - 1,$$

d. h. alle Flächen der Schar können aus N von ihnen linear komponiert werden.

Hiernach kann jede Raumkurve als vollständiger Schnitt von N geeignet gewählten Flächen ν^{ter} Ordnung definiert werden. Die kleinste Anzahl von Flächen, welche eine gegebene Raumkurve ausschneiden, ist im allgemeinen größer als zwei.[65]) (So kann z. B. schon eine singularitätenfreie Raumkurve vierter Ordnung vom Geschlechte Null nicht als Durchschnitt zweier Oberflächen zweiten Grades dargestellt werden, da nur eine einzige solche Fläche diese Kurve enthält.)

V. Die Klassen algebraischer Gebilde.

30. Die Hauptkurve eines Körpers und ihre Weierstraßpunkte. Der genaueren Untersuchung aller algebraischen Kurven, welche zu demselben Körper oder zu derselben Kurvenklasse gehören, legen wir die Betrachtung der sog. *Hauptkurve* H des Körpers, nämlich derjenigen Kurve im Raume von $p-1$ Dimensionen zugrunde, deren homogene Koordinaten durch die Gleichungen:

$$(98) \qquad x_1 : x_2 : \cdots : x_p = \mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \cdots : \mathfrak{W}_p = dw_1 : dw_2 : \cdots : dw_p$$

bestimmt sind, wenn die $(\mathfrak{W}_i)$ ein Fundamentalsystem für die ganzen Divisoren der Differentialklasse W, also die (w_i) das System der zugehörigen Integrale erster Gattung bezeichnet. Ihre Bedeutung beruht darauf, daß sie offenbar invarianten Charakter bei jeder birationalen Transformation des Gebildes besitzt. Jede durch Kollineation unzerstörbare Eigenschaft der Hauptkurve ergibt somit eine wesentliche Eigenschaft des algebraischen Gebildes.

Ist der Körper nicht hyperelliptisch, so ist die Hauptkurve stets vom Geschlechte p des Körpers und von der Ordnung $2p-2$; sie besitzt keinen einzigen singulären Punkt. Jedes zum Körper gehörige algebraische Gebilde ist auf die Kurve H ebenso wie auf die *Riemann*sche Fläche eindeutig bezogen. Ist dagegen der Körper hyperelliptisch, und ist

$$u^2 = f_{2p+2}(z)$$

seine Grundgleichung, so entsprechen jedem Punkte von H zwei über-

65) *G. Landsberg*, J. f. Math. 131 (1904), p. 155 ff., stellt eine einfache Raumkurve durch eine einzige Gleichung, die Gleichung ihres Sekantenkomplexes dar und gibt ein Verfahren zur Aufstellung dieser Gleichung. [*O*]

einanderliegende Punkte der zugehörigen zweiblättrigen *Riemann*schen Fläche $\mathfrak{R}_\varepsilon$. Infolgedessen ist hier das Geschlecht der Hauptkurve gleich Null, da ihre Koordinaten in dem Unterkörper $K(\varepsilon)$ rational sind, und ihre Ordnung ist nun gleich $(p-1)$.

Zerlegt man nun nach (87) die zu der Schar $(\mathfrak{W}_1, \ldots \mathfrak{W}_p)$ gehörige Differentialdeterminante $\Delta(\mathfrak{W})$, deren Divisor der Klasse $W^{\frac{1}{2}p(p+1)}$ angehört, so erhält man die Gleichung:

$$(99)\quad \Delta(\mathfrak{W}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{W}_1, & \mathfrak{W}_2, \ldots & \mathfrak{W}_p \\ d\mathfrak{W}_1, & d\mathfrak{W}_2, \ldots & d\mathfrak{W}_p \\ \cdot\ \cdot\ \cdot, & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d^{p-1}\mathfrak{W}_1, & d^{p-1}\mathfrak{W}_2, \ldots & d^{p-1}\mathfrak{W}_p \end{vmatrix} = \mathfrak{Z}_1^{p-1}\mathfrak{Z}_2^{p-2}\ldots\mathfrak{Z}_{p-2}^{2}\mathfrak{Z}_{p-1} = \prod_{\mathfrak{B}|\mathfrak{R}} \mathfrak{P}^{\alpha}.$$

Die den Primteilern von $\Delta(\mathfrak{W})$ entsprechenden Punkte $\mathfrak{P}$ sollen die *Weierstraß-Punkte* des Körpers, und ihre Ordnungszahlen α das *Gewicht* derselben heißen. Ist allgemein $\mathfrak{Z}_i$ durch $\mathfrak{P}^{\alpha_i - 1}$ genau teilbar, so folgt aus (99)

$$(99\text{a})\quad \alpha = (p-1)(\alpha_1 - 1) + (p-2)(\alpha_2 - 1) + \cdots + (\alpha_{p-1} - 1)$$

und, da der Divisor von $\Delta(\mathfrak{W})$ der Klasse $W^{\frac{1}{2}p(p+1)}$ angehört, so ergibt sich aus derselben Gleichung für die Summe der Gewichte aller *Weierstraß*punkte:

$$(99\text{b})\qquad \sum \alpha = (p-1)\,p(p+1).$$

Jeder Körper, dessen Geschlecht größer ist als 1, besitzt also immer *Weierstraß*punkte; nur diese haben positives Gewicht.

Eine andere Charakterisierung der *Weierstraß*punkte liefert unmittelbar die Anwendung des *Riemann-Roch*schen Satzes zur Bestimmung der Dimensionen $\{\mathfrak{P}\}$, $\{\mathfrak{P}^2\}, \ldots$ der Divisorenklassen, welche äquivalent den Potenzen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^2 \ldots$ eines beliebig gegebenen Primteilers sind, oder, was dasselbe ist, der Ordnungszahlen aller Funktionen des Körpers, welche nur in $\mathfrak{P}$ unendlich werden. In dem Systeme dieser Ordnungszahlen fehlen nämlich stets genau so viele als die Geschlechtszahl p des Körpers angibt (*Weierstraß*scher Lückensatz). Sind nun $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ diese fehlenden Ordnungszahlen, so ist allgemein:

$$(100)\qquad \begin{gathered} \varrho_1 = 1,\ \varrho_2 = \alpha_1 + 1,\ \varrho_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 1, \ldots, \\ \varrho_p = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1} + 1. \end{gathered}$$

Für jeden gewöhnlichen Punkt der Fläche ist also stets $\varrho_i = i$, d. h. es gibt für sie keine Funktionen erster, zweiter ... p^{ter} Ordnung, während alle höheren Ordnungszahlen auftreten. Die *Weierstraß*punkte

sind dagegen die einzigen, für welche nichtkonstante Funktionen $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}^\varrho}$ existieren, deren Exponent ϱ kleiner als $p+1$ ist.

Für einen hyperelliptischen Körper vom Geschlechte p sind die $2p+2$ Verzweigungspunkte die einzigen *Weierstraß*punkte, und jeder von ihnen hat das Gewicht $\frac{1}{2}p(p-1)$. Für diese Punkte fehlen die p Ordnungszahlen $1, 3, 5, \ldots (2p-1)$. Für alle anderen Körper ist das Gewicht jedes *Weierstraß*punktes kleiner als $\frac{1}{2}p(p-1)$, ihre Anzahl also stets größer als $2p+2$. Elliptische und rationale Körper haben keine *Weierstraß*punkte.

Im allgemeinen tritt ein Primfaktor $\mathfrak{P}$ nur in der ersten Potenz in $\Delta(\mathfrak{W})$ auf, und es kann als eine Besonderheit betrachtet werden, wenn $\Delta(\mathfrak{W})$ einen mehrfachen Teiler enthält. Für einen einfachen Teiler fehlen also die Ordnungszahlen $(1, 2, \ldots p-1, p+1)$. Ein Körper, welcher nur die gewöhnlichen, durch den Wert von p bedingten Besonderheiten darbietet, heißt ein *ordinärer Körper*. Ein solcher hat also $(p-1)\,p\,(p+1)$ verschiedene *Weierstraß*punkte $\mathfrak{P}$ vom Gewichte Eins, und für jeden von ihnen gibt es in K eine Funktion mit dem p-fachen Pole $\mathfrak{P}$, aber keine Funktion von niederer Ordnung.

Unterwirft man ein algebraisches Gebilde $F(z,u)=0$ durch die umkehrbaren Gleichungen $z'=\varphi(z,u)$, $u'=\psi(z,u)$ einer Abbildung, so kann der Fall eintreten, daß das transformierte Gebilde $F(z',u')=0$ mit dem ursprünglichen übereinstimmt. Man nennt eine solche Abbildung eine *Transformation des Gebildes in sich.*

Diese Transformationen führen jeden *Weierstraß*punkt notwendig wieder in einen solchen über, da ja jede Funktion $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}^\varrho}$, in welcher $\varrho < p+1$ ist, in eine andere $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{P}'^\varrho}$ derselben Art übergeht.

Die Gesamtheit aller dieser Transformationen bildet offenbar eine Gruppe G. Ferner bilden alle diejenigen unter ihnen, welche alle *Weierstraß*punkte in Ruhe lassen, eine Untergruppe U von G, und zwischen G und U besteht eine Gleichung:

$$G = U \cdot V,$$

wo V ein Komplex von Transformationen ist, bei denen die *Weierstraß*punkte auf lauter verschiedene Weisen untereinander vertauscht werden. Da es überhaupt nur eine endliche Anzahl von Vertauschungen dieser Punkte gibt, so folgt jetzt, daß die Anzahl aller Transformationen eines Gebildes in sich dann und nur dann endlich ist, wenn das Gleiche für die Anzahl derjenigen unter ihnen gilt, welche alle *Weierstraß*punkte in Ruhe lassen.

Aus der bloßen Tatsache nun, daß die Anzahl dieser Punkte $\geqq 2(p+1)$ ist, folgt nun, daß jene letzte Anzahl gleich zwei oder gleich eins sein muß, und hieraus ergibt sich der merkwürdige Satz:

Ein algebraisches Gebilde vom Geschlecht $p > 1$ besitzt stets nur eine endliche Anzahl von Transformationen in sich.

Bei der genaueren Untersuchung der Hauptkurve H eines algebraischen Körpers handelt es sich vor allem um die Frage, welche Flächen diese vollständig enthalten, bzw, wie sich H als vollständiger Schnitt algebraischer Flächen darstellen läßt. Arithmetisch betrachtet reduziert sich diese Frage auf die andere, wie groß die Anzahl der unabhängigen Relationen einer beliebigen r^{ten} Ordnung zwischen den p ganzen Divisoren der Differentialklasse W ist.

Nun folgt aus p. 604 (96), daß für ein hinreichend großes r alle ganzen Divisoren der Klasse W^r als ganze homogene Funktionen r^{ten} Grades jener Fundamentaldivisoren $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p)$ darstellbar sind. Es ist aber sehr bemerkenswert, daß in diesem Falle jene untere Grenze für den Exponenten r die kleinstmögliche wird; es gilt nämlich der folgende von *Nöther*[66]) herrührende wichtige Satz:

Ist der Körper K nicht hyperelliptisch, so kann jeder ganze Divisor der Klasse W^r als ganze homogene Funktion r^{ten} Grades der p Fundamentaldivisoren W_i der Klasse W ausgedrückt werden.

Um diesen Satz zu beweisen, beachten wir zunächst, daß die Dimension einer beliebigen Klasse W^r nach dem *Riemann-Roch*schen Satze stets gleich $(2r-1)(p-1)$ ist, sobald $r > 1$ ist. Andrerseits gehören die $\binom{p+r-1}{r}$ ganzen Divisoren:

$$\mathfrak{W}_1^{h_1}\mathfrak{W}_2^{h_2}\ldots\mathfrak{W}_p^{h_p} \qquad (h_1+h_2+\cdots+h_p=r)$$

stets derselben Klasse an. Kann man also aus ihnen $(2r-1)(p-1)$ unabhängige Divisoren auswählen, so ist der *Nöther*sche Satz in seinem vollen Umfang bewiesen. Diese Aufgabe kann aber stets gelöst werden, und zwar geschieht dies zunächst für die beiden ersten Klassen W^2 und W^3 durch ein direktes Verfahren. Nehmen wir dann an, die Frage sei bereits für die Klassen $W^2, W^3, \ldots W^r$ gelöst, wo $r \geqq 3$ ist, so kann sie folgendermaßen für die nächste Klasse W^{r+1} entschieden werden:

Es seien $\mathfrak{W}_\alpha$ und $\mathfrak{W}_\beta$ irgend zwei ganze teilerfremde Divisoren der Klasse W, und es sei $(\mathfrak{S}_r)$ ein System von $(2r-1)(p-1)$ Fundamentaldivisoren der Klasse W^r. Bilden wir dann die beiden Reihen:

(101) $$\mathfrak{W}_\alpha(\mathfrak{S}_r) \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}_\beta(\mathfrak{S}_r),$$

66) Math. Ann. 17 (1880), p. 263—284. [*O*].

so gehören die Elemente dieser Systeme zur Klasse W^{r+1} und sind nach dem Vorhergehenden ganze homogene Funktionen $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p$. Soll nun ein Divisor zu jeder der beiden Scharen (101) gehören, so muß er sowohl durch $\mathfrak{W}_\alpha$ als auch durch $\mathfrak{W}_\beta$, also auch durch ihr Produkt teilbar und somit in der Schar:

$$\mathfrak{W}_\alpha \mathfrak{W}_\beta (\mathfrak{S}_{r-1}) \tag{101a}$$

enthalten sein, wenn $\mathfrak{S}_{r-1}$ ein System von $(2r-3)(p-1)$ Fundamentaldivisoren der Klasse W^{r-1} bedeutet. Vereinigt man also jetzt die beiden Scharen (101) in der Art, daß ihr größter gemeinsamer Teiler (101a) nur einmal auftritt, so erhält man im ganzen $(2r+1)(p-1)$ linear unabhängige Elemente, und diese bilden somit ein Fundamentalsystem für die Klasse W^{r+1} w. z. b. w.

Hieraus folgt, daß für jedes $r > 1$

$$\tau_r = \binom{p+r-1}{r} - (2r-1)(p-1) \tag{102}$$

linear unabhängige homogene Gleichungen r^{ter} Ordnung zwischen den Divisoren $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p)$ bestehen, und ebenso groß ist die Dimension der Schar von Flächen r^{ter} Ordnung, welche die Hauptkurve enthalten.

31. Die Normalgleichungen und die Moduln der algebraischen Körper. Ein Körper K ist durch zwei geeignet gewählte Elemente x, y oder durch die zwischen ihnen bestehende Gleichung $f(x,y) = 0$ vollständig bestimmt. Alle anderen den Körper definierenden Gleichungen $g(z,u) = 0$ sind umkehrbar eindeutig auf diese bezogen. Alle so ineinander transformierten Gleichungen rechnen wir mit *Riemann* in eine *Klasse*. Ist die Gleichung $f(x,y) = 0$ irgendwie durch Bedingungen charakterisiert, welche von der Wahl der Grundgleichung unabhängig sind, so nennt man sie eine *Normalgleichung*; sie enthält, wenn das Geschlecht und die etwaigen Besonderheiten des Körpers gegeben sind, eine bestimmte Anzahl stetig veränderlicher unabhängiger Parameter, welche *die Moduln der Klasse* genannt werden. Eine der Hauptaufgaben der Theorie besteht darin, die Anzahl der Moduln zu bestimmen. Die soeben durchgeführten Untersuchungen führen in vielen Fällen zu einer einfachen Lösung derselben.

a) *Die Körper vom Geschlechte drei und vier.* Ist zunächst das Geschlecht des Körpers gleich drei, so ist seine Hauptkurve eine singularitätenfreie ebene Kurve vierter Ordnung, und jede solche Kurve entspricht umgekehrt einem bestimmten Körper dieses Geschlechtes als Hauptkurve. Die Untersuchung der projektiven Eigenschaften dieser ebenen Kurven ist hiernach völlig äquivalent der Analyse beliebiger

nichthyperelliptischer Körper vom Geschlechte drei. Nun enthält aber jene Gleichung 15 Konstanten, von denen aber nur $15 - 9 = 6$ wesentlich sind, da man die Variablen noch linear transformieren kann; sie sind also die Moduln des algebraischen Gebildes. Zwei Gebilde mit verschiedenen Moduln sind dann im allgemeinen nicht ineinander birational transformierbar.

Die adjungierten Kurven, deren Schnittpunktsysteme den Differentialteilern entsprechen, sind hier die Geraden der Ebene. Der Körper enthält hier keine Funktionen zweiter, aber unendlich viele dritter Ordnung. Man findet sie alle, wenn man durch einen beliebigen Kurvenpunkt zwei beliebige Gerade hindurchlegt. Jedem solchen Geradensystem entspricht eine Divisorenklasse von der Ordnung drei und der Dimension zwei, nämlich die Ergänzungsklasse der zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Klasse P.

Die Hauptkurve eines Körpers vom Geschlecht vier ist eine doppelpunktfreie Raumkurve sechster Ordnung:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \mathfrak{W}_3 : \mathfrak{W}_4.$$

Durch sie geht nach (102) eine einzige unzerlegbare Fläche zweiter und eine dritter Ordnung, und zwar bildet sie den vollständigen Durchschnitt derselben. Die Untersuchung derjenigen Körper vom Geschlecht vier, welche nicht hyperelliptisch sind, ist also völlig äquivalent der Ergründung der projektiven Eigenschaften derjenigen Raumkurven sechster Ordnung, welche der Schnitt zweier Flächen von zweiter und dritter Ordnung ohne besondere Lagenbeziehungen sind.

Hier gibt es aber zwei wesentlich verschiedene Arten nichthyperelliptischer Körper vom Geschlechte vier, je nachdem die zugehörige Fläche zweiter Ordnung eine ordinäre Fläche, also ein Hyperboloid, oder ein Kegel ist. Im ersten Falle zerfällt die Klasse W in zwei eindeutig bestimmte voneinander verschiedene Ergänzungsklassen A und B der dritten Ordnung und der zweiten Dimension, im zweiten fallen jene beiden Klassen zusammen, W ist also das Quadrat einer eindeutig bestimmten Klasse derselben Art. Im ersten Falle gehen durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Hauptkurve zwei und nur zwei voneinander verschiedene und niemals zusammenfallende Trisekanten dieser Kurve hindurch, welche die beiden erzeugenden Geraden des Hyperboloides durch $\mathfrak{P}$ sind; arithmetisch werden diese Geraden durch die beiden durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Divisoren $\mathfrak{A}_1 - \lambda\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_1 - \mu\mathfrak{B}_2$ dargestellt, welche zu den beiden Ergänzungsklassen $A = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ und $B = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ gehören. Da in diesem Fall zwei verschiedene Klassen dritter Ordnung existieren, so gibt es in K zwei Funktionen dritter Ordnung x und y,

welche durch eine *irreduktible* Gleichung zusammenhängen, die in bezug auf jede Variable von drittem Grade ist, und sie kann als Normalkurve für diesen Fall zugrunde gelegt werden. Man erkennt leicht, daß sie 9 wesentliche Konstanten oder Moduln besitzt.

Im zweiten Falle geht durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Hauptkurve eine einzige Trisekante derselben, welche die diesem entsprechende Kegelkante ist, und sie gehört zu dem $\mathfrak{P}$ enthaltenden Divisor $\mathfrak{A}_1 - \lambda\mathfrak{A}_2$ der Klasse $A = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$. Da hier nur eine Klasse dritter Ordnung existiert, so gelangt man zu einer Normalgleichung, wenn man aus K eine Funktion dritter und eine geeignet normierte Funktion sechster Ordnung auswählt. Die Gleichung, durch welche diese zusammenhängen, hat die Form

$$y^3 + a_4(x)y + b_6(x) = 0,$$

und ihre Diskriminante hat verschiedene Wurzeln; umgekehrt charakterisiert jede solche Gleichung einen derartigen Körper. Diese Gleichung besitzt acht wesentliche Konstanten oder Moduln.

b) *Die rationalen elliptischen und hyperelliptischen Gebilde.* Die Körper $K(z, u)$ und $K(x, y)$ mögen zunächst beide das Geschlecht Null haben, und es seien

$$z = r(t),\ u = s(t) \quad \text{bzw.} \quad x = R(\tau),\ y = S(\tau)$$

die Ausdrücke der Funktionen durch je eine Funktion t und τ ersten Grades von $K(z,u)$ bzw. $K(x,y)$; sind beide Körper also gleich, so hängen diese Funktionen ersten Grades notwendig durch eine lineare Gleichung

$$t = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

zusammen; umgekehrt können aber auch offenbar irgend zwei rationale Gebilde durch eine derartige Substitution stets ineinander transformiert werden; die Anzahl der Moduln ist hier also gleich Null und es gilt der Satz:

> Jedes algebraische Gebilde vom Geschlechte Null kann durch unendlich viele Transformationen, welche von drei willkürlichen Parametern abhängen, in jedes andere Gebilde derselben Art übergeführt werden.

Ein hyperelliptischer Körper ist dadurch charakterisiert, daß er eine Funktion zweiter Ordnung enthält. Wählt man sie zur unabhängigen Variablen, so kann man die andere so wählen, daß

$$u^2 = (z - e_1)(z - e_2)\ldots(z - e_{2p+2}) \tag{103}$$

wird. Dann ist:

$$z = \frac{\vartheta z}{\vartheta_z}, \quad u = \frac{\vartheta_\bullet}{\vartheta_z^{p+1}}, \tag{103a}$$

und die Gleichung (103) läßt sich schreiben:

$$(103\,b)\quad \mathfrak{Z}_z^2 = (\mathfrak{z}_z - e_1\mathfrak{n}_z)(\mathfrak{z}_z - e_2\mathfrak{n}_z)\dots(\mathfrak{z}_z - e_{2p+2}\mathfrak{n}_z) = G(\mathfrak{z}_z, \mathfrak{n}_z).$$

Ist nun $p > 1$, so folgt aus dem *Riemann-Roch*schen Satze, daß die Klasse zweiter Ordnung $A = (\mathfrak{z}_z, \mathfrak{n}_z)$, welcher Zähler und Nenner von z angehören, von der Dimension zwei ist, und daß sie die einzige Klasse zweiter Ordnung ist. Jede andere Funktion zweiter Ordnung z' hängt also mit z durch eine Gleichung:

$$(104)\qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

$$(104\,a)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{z}_{z'} &= \alpha\mathfrak{z}_z + \beta\mathfrak{n}_z \\ \mathfrak{n}_{z'} &= \gamma\mathfrak{z}_z + \delta\mathfrak{n}_z \end{aligned}$$

zusammen. Ist daher ein zweites hyperelliptisches Gebilde vom Geschlechte p durch die entsprechende Gleichung

$$\mathfrak{Z}_{z'}^2 = (\mathfrak{z}_{z'} - e_1'\mathfrak{n}_{z'})(\mathfrak{z}_{z'} - e_2'\mathfrak{n}_{z'})\dots(\mathfrak{z}_{z'} - e'_{2p+2}\mathfrak{n}_{z'}) = G'(\mathfrak{z}_{z'}, \mathfrak{n}_{z'}),$$

charakterisiert, so ist dann und nur dann $K(z,u) = K(z',u')$, wenn z mit z' durch eine Gleichung (104) zusammenhängt, wenn also $G(\mathfrak{z}_z, \mathfrak{n}_z)$ und $G'(\mathfrak{z}_{z'}, \mathfrak{n}_{z'})$ durch die Substitution (104a) ineinander übergehen. Das ist aber bekanntlich dann und nur dann der Fall, wenn die Verzweigungspunkte $(e_1', e_2', \dots e'_{2p+2})$ so angeordnet werden können, daß die $2p-1$ Doppelverhältnisse (e_1, e_2, e_3, e_h) und (e_1', e_2', e_3', e_h') einander gleich sind. Es besteht also der Satz (der auch für $p = 1$ richtig bleibt):

Die Anzahl der Moduln der hyperelliptischen Gebilde vom Geschlechte p ist stets gleich $2p-1$.

Im Falle $p = 1$ tritt der wesentliche Unterschied ein, daß es hier nicht nur eine, sondern unendlich viele verschiedene Klassen zweiter Ordnung und zweiter Dimension gibt, es ist also hier nicht notwendig, daß $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ sein muß, wenn $K(z,u) = K(z',u')$ sein soll. Man zeigt aber auch hier, daß dann und nur dann zwei durch die Gleichungen

$$(105)\qquad \begin{aligned} u^2 &= C(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4) \\ u'^2 &= C'(z' - e_1')(z' - e_2')(z' - e_3')(z' - e_4') \end{aligned}$$

definierte Körper $K(z,u)$ und $K(z',u')$ einander gleich sind, wenn die beiden Doppelverhältnisse (e_1, e_2, e_3, e_4) und (e_1', e_2', e_3', e_4') gleiche Werte haben. Ist das der Fall, so geht also auch sicher der eine Körper in den anderen durch die obige lineare Transformation über; nur gibt es hier außer dieser noch unendlich viele andere Transformationen, welche den unendlich vielen verschiedenen Divisorenklassen

von der Ordnung und der Dimension zwei entsprechen. Zu dem vorigen Theorem tritt also im Falle $p = 1$ noch der folgende Satz hinzu:

Ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte Eins besitzt unendlich viele Transformationen in sich, welche von *einem* veränderlichen Parameter abhängen.

c) *Die ordinären Körper vom Geschlecht* $p \geqq 3$. Ist K ein ordinärer Körper vom Geschlecht p, so ist zwar seine Hauptkurve von invarianter Beschaffenheit, sie ist aber, da sie im $(p-1)$-dimensionalen Raume liegt, nicht direkt zur Aufstellung einer Normalgleichung verwendbar. Man gelangt aber zu einer solchen, wenn man auf der Hauptkurve $(p-3)$ Punkte willkürlich aber fest auswählt und vermöge eines durch sie hindurchgelegten Büschels ebener Mannigfaltigkeiten diese Kurve in eine Ebene projiziert. So ergibt sich als Projektionskurve eine ebene Kurve der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung vom Geschlechte p mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ gewöhnlichen Doppelpunkten; und umgekehrt beweist man leicht, daß jede solche Kurve einen ordinären Körper vom Geschlecht p definiert. Aus der einfachen Abzählung der wesentlichen Konstanten dieser Normalkurve ergibt sich der wichtige, auch für $p = 2$ gültige von *Riemann* zuerst aufgestellte Satz:

Eine Klasse algebraischer Gebilde vom Geschlecht p ohne jede Besonderheit besitzt $3p-3$ Moduln.

32. Die Normalgleichungen und die Moduln der allgemeinen Körper vom Geschlecht p. Es sei jetzt allgemein K ein nichtordinärer Körper, $\mathfrak{P}_\infty$ einer seiner *Weierstraß*punkte. Wir betrachten dann alle Funktionen von K, deren Nenner eine Potenz von $\mathfrak{P}_\infty$ ist; es sei n die kleinste positive unter den vorhandenen Ordnungszahlen, $r+n$ sei eine spätere, welche in der Reihe der Ordnungszahlen an $(h+1)^{\text{ter}}$ Stelle stehen möge, und zwar sei sie die kleinste Zahl dieser Reihe, welche zu n teilerfremd ist. Sind dann x und y zwei Funktionen des Körpers, welche die Divisorendarstellung

$$x = \frac{\delta_x}{\mathfrak{P}_\infty^n}, \quad y = \frac{\delta_y}{\mathfrak{P}_\infty^{n+r}} \tag{106}$$

besitzen, so sind sie durch eine irreduktible Gleichung vom Geschlechte p

$$F\binom{(n+r)\ (n)}{x\ ,\ y} = 0 \tag{107}$$

verbunden. Diese Kurve besitzt ferner genau $\frac{1}{2}(n-1)(r+n-1)-p$ Doppelpunkte im Endlichen. Umgekehrt definiert jede solche Gleichung einen Körper dieser Art vom Geschlechte p, und x, y besitzen die Darstellung (106). Bringt man nun durch geeignete Normierung von

∂_x und ∂_y möglichst viele von den Konstanten von $F(x,y)$ in Fortfall und reduziert man ferner die Konstantenzahl dadurch, daß man der Kurve die obige Zahl von Doppelpunkten erteilt, so erhält man wieder durch Abzählung die Anzahl der übrigbleibenden wesentlichen Konstanten, und zwar ergibt sich der Satz:

Es sei für ein algebraisches Gebilde vom Geschlecht p die Gesamtheit der zu einem beliebigen *Weierstraß*punkte $\mathfrak{P}_\infty$ gehörigen vorhandenen Ordnungszahlen bekannt; n sei die kleinste positive unter ihnen, $n+r$ aber die nächste, welche zu n relativ prim ist, und es stehe $r+n$ in jener Reihe an $(h+1)^{\text{ter}}$ Stelle. Dann ist die Anzahl der Moduln des Gebildes gleich

$$p-3+2n+r-h.$$

Folgerungen: α) Besitzt das Gebilde wenigstens einen regulären *Weierstraß*punkt $\mathfrak{P}_\infty$, so ist für ihn die Reihe der vorhandenen Ordnungszahlen $(0, p, p+2, p+3 \ldots)$. Also ist für ihn $n=p$, und wenn $p+r$ die erste zu p teilerfremde Zahl ist, so ist $h=r$; also besteht der Satz:

Besitzt das algebraische Gebilde auch nur einen regulären *Weierstraß*punkt, so ist die Anzahl seiner Moduln gleich $3p-3$.

β) Ist für einen *Weierstraß*punkt $\mathfrak{P}_\infty$ die Reihe der vorhandenen Ordnungszahlen

$$(0, p, p+1, \ldots p+g-1, p+g+1, \ldots),$$

wo $g>1$ ist, so ist wieder $n=p$, $r=1$, also $h=2$, und die Zahl der Moduln wird daher $3p-4$.

γ) Ist das Gebilde hyperelliptisch, so wird jene Reihe:

$$(0, 2, 4, \ldots 2p, 2p+1, 2p+2, \ldots),$$

also $n=2$, $n+r=2p+1$, $h=p+1$, also ergibt sich wieder die Anzahl der Moduln gleich $2p-1$.

δ) Enthält das Gebilde einen *Weierstraß*punkt mit der Ordnungszahl drei, so läßt sich die Reihe der für diesen Punkt vorhandenen Ordnungszahlen folgendermaßen schreiben:

$$\begin{gathered} 0, 3, 6, \cdots \\ 3\mu_1+1, 3\mu_1+4, 3\mu_1+7, \cdots \\ 3\mu_2+2, 3\mu_2+5, 3\mu_2+8, \cdots. \end{gathered}$$

Die Anwendung des allgemeinen Satzes auf diese Reihe ergibt, daß die Zahl der Moduln in diesem Falle gleich $p+2\mu_1$ oder gleich $p+2\mu_2+1$ ist, je nachdem $\mu_1 \leqq \mu_2$ oder $\mu_1 > \mu_2$ ist.

An eine charakteristischere Eigenschaft des Körpers knüpft die folgende Methode zur Aufstellung einer Normalgleichung an: Als un-

abhängige Variable x nimmt man eine Funktion der niedrigsten Ordnung μ, welche in K überhaupt auftritt, und wählt dann das andere Element y so aus, daß $K(x,y) = K$ wird. Aus dem *Riemann-Roch*schen Satze ergibt sich dann, daß die Klasse A des Zählers und Nenners von x notwendig die Dimension zwei hat, und daß für ordinäre Körper ihre Ordnung μ gleich $\frac{p}{2}+1$ oder $\frac{p+3}{2}$ sein muß, je nachdem p gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle existiert nur eine endliche Anzahl, im zweiten einfach unendlich viele solche Divisorenklassen der Dimension zwei und der Ordnung μ.

In welcher Weise dann die abhängige Variable y ausgewählt werden kann, werde für den Fall $\mu = 3$ unter der Annahme ausgeführt, daß das Gebilde nicht hyperelliptisch ist, wohl aber auf eine dreiblättrige *Riemann*sche Fläche bezogen werden kann, wobei jetzt $p > 4$ vorausgesetzt werden kann.

In der eindeutig bestimmten Klasse $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ der niedrigsten Ordnung 3, wähle man $x = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}$ so aus, daß $\mathfrak{A}' = \mathfrak{P}_1^{(\infty)}\mathfrak{P}_2^{(\infty)}\mathfrak{P}_3^{(\infty)}$ drei verschiedene Primfaktoren enthält. Es sei dann r der kleinste Exponent, für welchen $\{A^r\} > r+1$ ist. Wählen wir dann von dieser Klasse $y = \frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}'^r}$ so aus, daß der Zähler $\mathfrak{A}_r$ von den $r+1$ Potenzprodukten $(\mathfrak{A}^r, \mathfrak{A}^{r-1}\mathfrak{A}', \ldots \mathfrak{A}'^r)$ linear unabhängig ist, so hängen x und y durch eine in y kubische irreduktible Gleichung $F(\overset{(3)}{y}, \overset{(r)}{x}) = 0$ zusammen, und es ist $K(x,y) = K$. Durch geeignete Bestimmung des Zählers $\mathfrak{A}_r$ von y kann man erreichen, daß diese Gleichung die Form erhält:

$$F(y,x) = y^3 + a_{2r}(x)y + b_{3r}(x) = 0.$$

Ist $(1, \xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ ein normales Fundamentalsystem dieses Körpers für die Stelle $(x = \infty)$, so sind die Ordnungszahlen von $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ gleich $-r$ und $-(r+s)$, wo $0 \leqq s \leqq r$ ist. Umgekehrt bestimmt eine solche Gleichung dann und nur dann einen Körper vom Geschlecht p, bei Beschränkung auf gewöhnliche Singularitäten, wenn diese Kurve $\tau = (r-s)$ gewöhnliche Doppelpunkte hat. Bestimmt man nun die in $a_{2r}(x)$ und $b_{3r}(x)$ vorhandenen Koeffizienten so, daß die Kurve in τ beliebig gegebenen Punkten je einen Doppelpunkt hat, und beseitigt man von den dann in dieser Gleichung auftretenden Konstanten so viele, wie sich durch Normierung der Variablen x und y fortschaffen lassen, so ergibt sich als Schlußresultat der folgende Satz:

Wenn in einem Körper vom Geschlechte $p > 4$ keine Funktionen zweiter, wohl aber solche der dritten Ordnung existieren, so gibt es eine und nur eine Divisorenklasse A der Ordnung drei und

der Dimension zwei und eine bestimmte Potenz von A mit möglichst niedrigem Exponenten r, deren Dimension größer als $r+1$ ist. Setzt man dann:

$$p = 2r + s - 2,$$

so ist $r \geqq s \geqq 0$, und die Klasse des algebraischen Gebildes ist durch $p+2r$ resp. $p+2r-1$ Moduln charakterisiert, je nachdem s positiv oder Null ist. Die Zahl der Moduln wird möglichst groß, nämlich $2p+1$, wenn r seinen Maximalwert $\frac{p}{2}+1$ bzw. $\frac{p+1}{2}$ annimmt, also $s=0$ bzw. 1 wird.

VI. Algebraische Relationen zwischen Abelschen Integralen.

33. Algebraische Normierung der Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung. Aufgabe dieses Abschnittes ist es, durch direkte algebraische Methoden Einblick in die Periodizität der *Abel*schen Integrale und in die Zusammenhangsverhältnisse der zum Körper K gehörigen *Riemann*schen Flächen zu gewinnen. Hier sind die algebraischen Tatsachen festzustellen, welche den Sätzen der Analysis situs und den geometrischen Theoremen entsprechen, mit deren Hilfe sonst die topologischen Eigenschaften der *Riemann*schen Flächen erkannt und ihre Zerschneidung geleistet wird.[67])

Für diese Untersuchungen wählen wir, was stets durch eine birationale Transformation erreicht werden kann, die unabhängige Variable $z = \frac{\delta_z}{\mathfrak{P}_\infty^n}$ so, daß sie als Nenner nur die Potenz eines Primdivisors besitzt, daß also die zugehörige *Riemann*sche Fläche $\mathfrak{R}_z$ im Unendlichen einen einzigen n-blättrigen Verzweigungspunkt $\mathfrak{P}_\infty$ besitzt.

Die Gesamtheit aller ganzen algebraischen Funktionen von z, welche also nur in $\mathfrak{P}_\infty$ unendlich groß werden, bildet das Ideal $I(1)$ aller Multipla des Divisors 1. Es seien

$$(\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n-1)}) \quad \text{und} \quad (\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n-1)})$$

67) Derartige Methoden sind zuerst von *Weierstraß* in seinen Vorlesungen verwendet, jedoch erst bei *B.-N.* (1894), p. 426—429 in äußerst knapper Form skizziert worden. Die ihnen zugrunde liegende Form des Satzes von der Vertauschbarkeit des Argumentes und des Parameters bei den Integralen dritter Gattung rekonstruiert *Baker* (1897) (*B.* 185—186) und gibt zugleich eine einfachere Form des Satzes (*B.* 194), bei der die von *Weierstraß* benutzte von $p+2$ Stellen des Gebildes abhängige Funktion durch eine nur von zwei Stellen des Gebildes abhängende ersetzt wird. Unter Benutzung der *Baker*schen Form des Satzes wird der *Weierstraß*sche Gedanke bei *H.-L.* durchgeführt. Für die *Weierstraß*sche Durchführung vgl. *Weierstraß*, Vorlesungen, p. 304ff. [*O*]

ein für $\mathfrak{P}_\infty$ normales Fundamentalsystem für diese ganzen Funktionen und sein komplementäres System, welches dann ebenfalls für $\mathfrak{P}_\infty$ normal ist; durch diese beiden Systeme denken wir uns in der Folge die ganzen algebraischen Funktionen des Körpers einerseits und die *Abel*schen Integrale andrerseits dargestellt.

Betrachtet man nun die Ordnung des Unendlichwerdens aller ganzen Funktionen im Punkte $\mathfrak{P}_\infty$, so treten nach dem *Weierstraß*schen Lückensatze nicht alle positiven ganzen Zahlen als Ordnungen dieser Funktionen auf, sondern es fehlen stets p, also genau so viele als es verschiedene Integrale erster Gattung gibt. Bezeichnet man nun diese fehlenden Ordnungszahlen nach ihrer Größe geordnet durch

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p$$

so kann man, wie eine einfache Diskussion zeigt[67a]), ein System von p unabhängigen Integralen erster Gattung

$$w_1, w_2, \dots w_p$$

rein algebraisch so normieren, daß allgemein w_i in $\mathfrak{P}_\infty$ die positive Ordnungszahl ϱ_i besitzt. Man kann es sogar erreichen, daß in der Entwicklung von w_i im Bereiche von $\mathfrak{P}_\infty$ die Glieder der höheren Ordnungen $\varrho_{i+1}, \varrho_{i+2}, \dots \varrho_p$ sämtlich den Koeffizienten Null haben. Durch diese Festsetzungen sind dann die w_i eindeutig festgelegt.

Ferner kann man nun p Integrale zweiter Gattung mit dem einzigen Pole $\mathfrak{P}_\infty$, $(t_1, t_2, \dots t_p)$ so bestimmen, daß sie in diesem Punkte in den Ordnungen $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p$ unendlich werden, so daß also jedes Produkt $w_i t_i$ in $\mathfrak{P}_\infty$ endlich und von Null verschieden wird. Durch diese Festsetzung sind die Integrale t_i nur bis auf eine homogene lineare Funktion von Integralen erster Gattung bestimmt; ihre vollständige Normierung behalten wir uns vor.

Jedes andere zu $\mathfrak{R}_z$ gehörige Integral zweiter Gattung, welches also nur polare Unstetigkeiten hat, ist dann auf eine einzige Weise als Summe einer Funktion des Körpers und einer homogenen linearen Funktion dieser $2p$ Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung darstellbar.[68]) Man bezeichnet daher die Reihe $(t_1, t_2, \dots t_p, w_1, w_2, \dots w_p)$ derselben, oder, wenn allgemein $w_i = t_{p+i}$ gesetzt wird, die Reihe

$$t_1, \dots t_p, t_{p+1}, \dots t_{2p} \tag{107a}$$

als ein *Fundamentalsystem für die allgemeinen Integrale zweiter Gat-*

67a) Vgl. *H.-L.*, p. 564—570.

68) *D.-W.* (p. 289—290) beweisen die lineare Ausdrückbarkeit aller Differentiale erster und zweiter Gattung durch $2p$ geeignet gewählte auf rein algebraischem Wege. [*O*]

tung; dasselbe ist ein irreduktibles System solcher Integrale, weil keine lineare Verbindung von ihnen gleich einer Funktion des Körpers sein kann. Jedes andere Fundamentalsystem für diese Integrale geht aus diesem durch eine umkehrbare lineare Substitution mit konstanten Koeffizienten hervor.

34. Die Integrale dritter Gattung und der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument. Um zu einer einheitlichen Darstellung der Integrale dritter Gattung zu gelangen, welche in unserer Theorie eine Hauptrolle spielt, führen wir die folgende algebraische Funktion der beiden unabhängigen Variablen z und $\bar{z}$ ein:

$$\theta(\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}) = \frac{\bar{\xi}_0\eta_0 + \bar{\xi}_1\eta_1 + \cdots + \bar{\xi}_{n-1}\eta_{n-1}}{z-\bar{z}}. \tag{108}$$

Hier sind $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ zwei verschiedene unabhängig veränderliche Punkte der Fläche $\mathfrak{R}_z$, und die in θ auftretenden Funktionen hängen von $\overline{\mathfrak{P}}$ oder von $\mathfrak{P}$ ab, je nachdem sie überstrichen oder nicht überstrichen sind. Diese Funktion ist also in rationaler Weise von den beiden Variablensystemen (z,u) und $(\bar{z},\bar{u})$ abhängig, ist also eine Größe des Körpers $K(zu, \bar{z}\bar{u})$ Eine einfache Zerlegung von $\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})$ in seine Primfaktoren zeigt dann, daß ein Elementarintegral dritter Gattung mit den logarithmischen Stellen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ und den zugehörigen Residuen -1 und $+1$ in einer der folgenden beiden Formen darstellbar ist:

$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = \int dz(\theta(\mathfrak{P},\mathfrak{P}_2) - \theta(\mathfrak{P},\mathfrak{P}_1)) = \int dz \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} \frac{d\theta(\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}})}{dz}\, d\bar{z}.^{69}) \tag{109}$$

Der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument ist bei dieser Auffassung die Folge einer algebraischen Identität, welche sich folgendermaßen aussprechen läßt:

Normiert man die bis jetzt nur bis auf Integrale erster Gattung bestimmten Integrale $t_1, t_2, \ldots t_p$ in geeigneter Weise, so bleibt der Differentialausdruck:

$$D(\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}}) = \frac{d}{d\bar{z}}\theta(\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}})\, d\bar{z}\, dz + \sum_1^p dw_i(\mathfrak{P}) \cdot dt_i(\overline{\mathfrak{P}}), \tag{109a}$$

welcher für das Argument $\mathfrak{P}$ ein Differential zweiter Gattung mit dem einzigen und einfachen Pole $\overline{\mathfrak{P}}$ darstellt, bei der Vertauschung des Argumentes $\mathfrak{P}$ und des Parameters $\overline{\mathfrak{P}}$ ungeändert.

Wir können nunmehr zu der Integralform des Vertauschungs-

69) Diese Form des Integrals dritter Gattung und die daraus folgende für die Integrale 2. Gattung ist von *Baker* gegeben worden [Math. Ann. 45 (1894); p. 67]. Vgl. *H.-L.*, p. 576—587. [*O*]

satzes von Parameter und Argument dadurch übergehen, daß wir die veränderlichen Punkte $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ auf zwei bestimmten Wegen s und σ fortrücken lassen, von denen der erste s sich von $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$, der zweite σ von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$ erstrecken mögen, und sodann den Differentialausdruck $D(\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}})$ über diese beiden Wege integrieren. Machen wir zuerst die Voraussetzung, daß sich die Wege s und σ nicht schneiden, so ergibt sich jenes Theorem aus dem folgenden Satze:

Das Integral:

$$(110)\qquad \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} = \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} \{\theta(\mathfrak{P},\mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P},\mathfrak{Q}_1)\}\, dz + \sum_{k=1}^{p} \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} dw_k \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_k$$

bleibt ungeändert, wenn man $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)$ mit $(\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2)$ vertauscht, oder kürzer, es ist

$$(110a)\qquad \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} = \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}.$$

Die gleiche Eigenschaft besitzt auch jedes Elementarintegral dritter Gattung, welches aus dem vorigen durch Hinzufügung einer Summe

$$\sum_{i,k=1}^{p} s_{ik} \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} dw_i \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dw_k$$

entsteht, wenn das Koeffizientensystem symmetrisch ist.[70]) Außer diesen Integralen gibt es aber keine andere Elementarintegrale dritter Gattung, welche die Vertauschung der Argumente $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ und der Parameter $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2$ gestatten.

Dieses Theorem wird modifiziert, wenn die Integrationswege s und σ sich schneiden.[71]) Setzen wir allgemein die Differenz

$$(111)\qquad \int_{s} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} - \int_{\sigma} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = I(s,\sigma),$$

so ist $I(s,\sigma)$ nach (110a) gleich Null, wenn s und σ getrennt verlaufen. Beachten wir die leicht erweisbaren Sätze, daß, wenn man s oder σ in zwei beliebige Teile zerlegt,

$$(112)\qquad \begin{gathered} I(s'+s'',\sigma) = I(s',\sigma) + I(s'',\sigma), \\ I(s,\sigma'+\sigma'') = I(s,\sigma') + I(s,\sigma''),\quad I(s,\sigma) = -I(\sigma,s) \end{gathered}$$

ist, so braucht jener Wert nur für zwei unendlich kleine sich kreuzende Wegstrecken (s_0, σ_0) berechnet zu werden; nun erhält man für diese $I(s_0,\sigma_0) = \mp 2\pi i$ je nachdem der Übergang von s_0 über σ_0

70) Vgl. *B.*, p. 194. [*O*]
71) Vgl. *B.*, p. 187. [*O*]

vom rechten zum linken oder vom linken zum rechten Ufer erfolgt. Im ersten Fall soll jener Übergang *ein positiver*, im zweiten *ein negativer* genannt werden. Hieraus ergibt sich dann der allgemeine Satz: es ist stets:

$$\int_{(s)} d\varpi_{\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2} - \int_{(\sigma)} d\varpi_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = 2\pi i(s,\sigma), \tag{113}$$

wo (s,σ) der Überschuß der Anzahl der positiven über die Anzahl der negativen Übergänge von s über σ bedeutet. Diese Zahl (s,σ), welche kurz *die Anzahl der Übergänge* genannt werde, heißt nach *Kronecker die Charakteristik der beiden Wege s und σ*. Es ist besonders wichtig, daß sich die Charakteristik durch Integrale längs des einen und des andern Weges ausdrückt; so erhalten wir ein Mittel, um die Zusammenhangsverhältnisse der Flächen $\mathfrak{R}_z$ ohne Hilfe der Analysis situs zu finden. In dieser Auffassung haben wir jene Gleichungen vollständig zu diskutieren und gelangen so zum Verständnisse der der *Riemann*schen Fläche eigentümlichen Zusammenhangsverhältnisse.

Setzen wir in der Gleichung (113) die Wege s und σ beide als geschlossen voraus, so stellt (s,σ) die Charakteristik zweier Periodenwege dar, und die in ihr auftretenden Integrale dritter Gattung fallen fort. Dann ergibt sich die wichtige Periodenrelation:

$$t_1^{(\sigma)}w_1^{(s)} + \cdots + t_p^{(\sigma)}w_p^{(s)} - w_1^{(\sigma)}t_1^{(s)} - \cdots - w_p^{(\sigma)}t_p^{(s)} = 2\pi i(s,\sigma), \tag{114}$$

wenn z. B. $\int_\sigma dt_\alpha = t_\alpha^{(\sigma)}$ gesetzt wird.

Es sei nun zunächst s ein solcher geschlossener Weg, daß für ihn alle $2p$ Perioden $t_\alpha^{(s)}$ und $w_\alpha^{(s)}$ Null sind. Dann besitzt auch *jedes* Integral mit polaren Unstetigkeiten, erstreckt über s, den Wert Null. Ein solcher Weg werde äquivalent Null gesetzt und ein *Nullweg* genannt. Ist ferner σ ein ebenfalls geschlossener sonst aber beliebiger Weg, so ist stets $(s,\sigma) = 0$; jeder geschlossene Weg σ überschreitet also s ebensooft von rechts nach links, wie von links nach rechts.

Ist zweitens $\sigma = \overset{\frown}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2}$ ungeschlossen, so folgt aus (113), daß $(s,\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_s (\theta(\mathfrak{P},\mathfrak{D}_2) - \theta(\mathfrak{P},\mathfrak{D}_1))dz$ nur von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$, nicht aber von σ abhängig ist, und daß dieses Integral nur einen von den drei Werten $0, +1, -1$ haben kann. Hieraus folgt, daß man alle Punkte der Fläche in bezug auf s eindeutig in zwei Klassen, die *inneren* und die *äußeren Punkte von s* einteilen kann.

Durch jeden Nullweg s wird die Fläche $\mathfrak{R}$ in zwei getrennte Teile geteilt, welche aus den inneren und den äußeren Punkten von s bestehen. Ist $p = 0$, so ist jeder geschlossene Weg ein Nullweg.

35. Einteilung aller Wege auf einer Riemannschen Fläche in Klassen. Ich betrachte nun die Gesamtheit aller Wege a auf $\mathfrak{R}$, von denen jeder aus einer endlichen Anzahl von getrennten oder zusammenhängenden Wegstücken besteht, die in beliebiger Reihenfolge, aber festgesetzter Richtung, durchlaufen werden. Unter der Summe $a+b$ zweier Wege verstehe ich den Weg, welcher aus den Wegstrecken von a und b besteht. Für die so definierte Verknüpfungsoperation bestehen dann die drei Grundgesetze der Addition, nämlich das kommutative und das assoziative Gesetz:

$$a+b=b+a, \quad a+(b+c)=(a+b)+c,$$

sowie das Gesetz von der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion, daß nämlich, wie auch die Wege a und b gegeben sind, stets ein einziger Weg $x=b-a$ existiert, für welchen $a+x=b$ ist.

Sind speziell a und b geschlossene Wege, so kann ihre Summe $a+b$, falls sie sich schneiden, direkt, falls sie sich nicht schneiden, durch Hinzufügung eines zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weges c wieder in einen geschlossenen Weg $a+c+b-c$ verwandelt werden.

Für alle Wege auf $\mathfrak{R}$ stelle ich nun die folgende Äquivalenzdefinition auf:

> Zwei Wege a und b heißen *äquivalent* $(a\sim b)$ und werden in dieselbe Klasse K gerechnet, wenn sie sich nur um einen Nullweg n unterscheiden, wenn also $a-b=n$ ist. Hiernach sind speziell alle Nullwege untereinander äquivalent; die durch sie gebildete Klasse K_0 soll *die Hauptklasse* genannt werden.

Hiernach sind zwei Wege a und b stets und nur dann äquivalent, wenn sie sich zu einem geschlossenen Wege ergänzen und wenn für sie die $2p$ Gleichungen:

$$\int_a dt_\alpha = \int_b dt_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots 2p) \tag{115}$$

sämtlich erfüllt sind, wo hier, wie im folgenden, die p Integrale erster Gattung w_β gleich $t_{p+\beta}$ gesetzt sind. Für die Äquivalenz geschlossener Wege a und b sind somit allein diese $2p$ Gleichungen (115) notwendig und hinreichend. Da die Differenz äquivalenter Wege immer geschlossen ist, so brauchen im folgenden nur die geschlossenen Wege untersucht zu werden.

Ein System $(s_1, s_2, \ldots s_m)$ von geschlossenen Wegen heißt *unabhängig*, wenn ein aus ihnen linear mit ganzzahligen Koeffizienten zusammengesetzter Weg

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_m s_m$$

nur dann äquivalent Null ist, wenn alle x_i verschwinden. Allein dann ist $s \sim 0$, wenn die auf dem Wege s gebildeten Perioden von $t_1, \ldots t_{2p}$ verschwinden, wenn also die Koeffizienten $x_1, \ldots x_m$ die $2p$ Gleichungen:

$$\int_{(s)} dt_\alpha = x_1 t_{\alpha 1} + x_2 t_{\alpha 2} + \cdots + x_m t_{\alpha m} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 2p) \tag{116}$$

erfüllen, in denen allgemein

$$\int_{(s_\beta)} dt_\alpha = t_{\alpha\beta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots 2p \\ \beta = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix} \tag{116a}$$

gesetzt ist. Jene Gleichungen besitzen stets und nur dann überhaupt keine von Null verschiedene Lösung, wenn der Rang des Koeffizientensystems

$$T = (t_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots 2p \\ \beta = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix} \tag{116b}$$

gleich m ist. In diesem Falle sind also die m Wege sicher unabhängig.

Zunächst zeige ich nun, daß man stets $2p$ Wege $(s_1, \ldots s_{2p})$ so auswählen kann, daß sie linear unabhängig sind. In der Tat kann man an Stelle von $(t_1, \ldots t_{2p})$ irgend ein anderes Fundamentalsystem $(\tau_1, \ldots \tau_{2p})$ zugrunde legen, welches mit jenem durch eine Substitution

$$\tau_h = \sum a_{hk} t_k + \varphi_h \qquad (h, k = 1, 2, \ldots 2p)$$

zusammenhängt, in der die φ_h algebraische Funktionen und die a_{hk} beliebige Konstanten von nichtverschwindender Determinante sind. Alsdann hängen die Periodendeterminanten $|\tau_{hk}|$ und $|t_{hk}|$ durch die Gleichung

$$|\tau_{hk}| = |a_{hk}||t_{hk}|$$

zusammen. Durch eine solche Transformation und durch geeignete Wahl von $(s_1, s_2 \ldots s_{2p})$ kann man nun erreichen, daß für das Fundamentalsystem $(\tau_1, \ldots \tau_{2p})$ das zugehörige Periodensystem (τ_{hk}) ein Dreieckssystem wird, welches unterhalb der Diagonale nur Nullen, in der Diagonale aber lauter von Null verschiedene Glieder hat, so daß also $|\tau_{hk}|$ und somit auch $|t_{hk}|$ nicht Null ist, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Auf jeder *Riemann*schen Fläche vom Geschlecht p gibt es somit $2p$ unabhängige Periodenwege.

Für ein solches Wegsystem $(s_1, s_2, \ldots s_{2p})$ ist nun nicht bloß die Periodendeterminante $|t_{gh}|$, sondern auch die ganzzahlige Determinante

$$C = |c_{gh}| = |(s_g, s_h)| \tag{117}$$

aller Charakteristiken der Wege s_h aufeinander von Null verschieden. In der Tat bestehen ja zwischen den Perioden für je zwei beliebige

Wege s_α und s_β die Gleichungen:

(118) $$t_{1\alpha}t_{p+1,\beta} + t_{2\alpha}t_{p+2,\beta} + \cdots + t_{p\alpha}t_{2p,\beta} - t_{p+1,\alpha}t_{1\beta} - \cdots - t_{2p,\alpha}t_{p\beta} = -2\pi i c_{\alpha\beta}.$$

Führen wir also das alternierende Hauptsystem:

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 0, & E_p \\ -E_p, & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \cdots & 0\ 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdots & 0\ 0 \cdots 1 \\ -1 \cdots & 0\ 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdots & -1\ 0 \cdots 0 \end{vmatrix}$$

ein und bezeichnen wie gewöhnlich durch $\bar{T}$ das zu $T = (t_{\alpha\beta})$ konjugierte System, so lassen sich alle diese Gleichungen in die eine Systemgleichung:

(118a) $$\bar{T}\mathsf{E}T = -2\pi i C$$

zusammenfassen, und aus ihr folgt durch Übergang zu den Determinanten, da $\mathsf{E}^2 = -1$ und $|\bar{T}| = |T|$ ist:

(118b) $$|T|^2 = (2\pi i)^{2p}\,|c_{gh}|^2;$$

es ist also wirklich $|c_{gh}| = |(s_g, s_h)| \gtrless 0$. Hieraus folgt speziell der Satz:

Ein Periodenweg s ist stets und nur dann kein Nullweg, wenn man wenigstens einen andern Weg s' finden kann, welcher mit ihm eine von Null verschiedene Charakteristik (s, s') hat.

Nunmehr zeigt man leicht, daß mit diesem unabhängigen System $(s_1, \ldots s_{2p})$ jeder andre Periodenweg s_0 ein abhängiges System bildet, d. h. daß man $2p+1$ nicht sämtlich verschwindende *ganze* Zahlen $x_0, x_1, \ldots x_{2p}$ so bestimmen kann, daß der Weg:

(119) $$\bar{s} = x_0 s_0 + x_1 s_1 + \cdots + x_{2p} s_{2p} \sim 0$$

ist. In der Tat ist ja hierfür notwendig und hinreichend, daß die $2p$ Gleichungen:

(119a) $$\int_{(\bar{s})} dt_\alpha = t_{\alpha 0}x_0 + t_{\alpha 1}x_1 + \cdots + t_{\alpha,2p}x_{2p} = 0$$

eine von (0) verschiedene ganzzahlige Lösung haben. Da aber auch das Koeffizientensystem $(t_{\alpha 0}, t_{\alpha\beta})$ vom Range $2p$ ist, so hat das Gleichungssystem, abgesehen von Proportionalitätsfaktoren eine einzige Lösung. Multipliziert man nun diese Gleichungen allgemein mit $t_{p+1,\beta}, \cdots t_{2p,\beta}, -t_{1\beta}, \cdots -t_{p\beta}$ und addiert sie, so ergeben sich für $\beta = 1, 2, \ldots 2p$ bei Beachtung der Periodenrelationen (118) für die-

selben $x_0, x_1, \ldots x_{2p}$ die ganzzahligen Gleichungen:

$$c_{\beta 0}x_0 + c_{\beta 1}x_1 + \cdots + c_{\beta, 2p}x_{2p} = 0,$$

deren ganzzahliges Koeffizientensystem $(c_{\beta 0}, c_{\beta\gamma})$ auch vom Range $2p$ ist, also auch nur eine einzige jetzt natürlich ganzzahlige Lösung besitzt; und da dieses Gleichungssystem eine Folge des vorigen ist, so hat letzteres dieselbe ganzzahlige Lösung $(x_0, x_1, \ldots x_{2p})$.

Hiernach kann also jeder Weg s_0 auf $\mathfrak{R}$ durch dieses unabhängige System $(s_1, \ldots s_{2p})$ eindeutig in der Form:

$$s_0 = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_{2p} s_{2p} \tag{120}$$

mit den rational *gebrochenen* Koeffizienten $r_i = -\frac{x_i}{x_0}$ dargestellt werden, wenn hier wie im folgenden eine solche symbolische Gleichung nur eine andre Schreibweise für die obige ganzzahlige homogene Äquivalenz (119) bedeutet. Ein solches unabhängiges Wegsystem $(s_1, s_2, \ldots s_{2p})$ soll daher eine *Basis von Periodenwegen* genannt werden.

Ist (120) die Darstellung eines beliebigen Weges s_0 durch die Basis $(s_1, \ldots s_{2p})$, so bestehen für die Perioden $\int_{(s_0)} dt_h = t_{h0}$ der Differentiale dt_h für jenen Weg und für die Charakteristiken (s_0, s_h) desselben Weges in bezug auf die Fundamentalwege s_h genau dieselben Gleichungen:

$$t_{h0} = r_1 t_{h1} + r_2 t_{h1} + \cdots + r_{2p} t_{h,p} \tag{120a}$$

und

$$(s_0, s_h) = r_1(s_1, s_h) + \cdots + r_{2p}(s_{2p}, s_h) \text{ d.h. } c_{0h} = r_1 c_{1h} + \cdots + r_{2p} c_{2p,h}. \tag{120b}$$

36. Die Fundamentalsysteme von Periodenwegen für eine Riemannsche Fläche. Ist $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)$ ein beliebiges System von Wegen, welches mit der Basis $(s_1, s_2, \ldots s_{2p})$ durch das rationale Substitutionssystem $R = (r_{\alpha\beta})$ $\begin{pmatrix}\alpha = 1, 2, \ldots 2p \\ \beta = 1, 2, \ldots m\end{pmatrix}$ zusammenhängt, so folgt aus den vorigen Betrachtungen unmittelbar der Satz:

Die Anzahl der in $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)$ enthaltenen linear unabhängigen Wege ist gleich dem Range des Systems $(r_{\alpha\beta})$. Dieses ist also dann und nur dann wieder eine Basis, wenn $m = 2p$ und $|r_{\alpha\beta}| \gtrless 0$ ist.

Sind ferner $\int_{(\sigma_\beta)} dt_\alpha = \tau_{\alpha\beta}$ die Perioden der Differentiale dt_α für die Wege σ_β, so hängt auch das System $\mathsf{T} = (\tau_{\alpha\beta})$ für das Wegsystem (σ_β) mit dem Periodensystem $T = (t_{\alpha\beta})$ für die Wege (s_β) durch die Gleichung

$$\mathsf{T} = T\bar{R}, \quad \bar{R} = T^{-1}\mathsf{T} \tag{121}$$

zusammen und da nach (117) auf p. 622 $|T| \gtrless 0$ ist, so haben T und R gleichen Rang; somit ergibt sich also der Satz:

Ist $(\sigma_1, \ldots \sigma_m)$ ein System geschlossener Wege und $\mathsf{T} = (\tau_{\alpha\beta})$ das zugehörige Periodensystem der $2p$ Fundamentalintegrale für diese, so ist die Zahl der im Systeme (σ_i) enthaltenen linear unabhängigen Wege gleich dem Range von (T). Also bilden diese stets und nur dann eine Basis für die Periodenwege, wenn $m = 2p$ und $|\mathsf{T}| \gtrless 0$ ist.

Es sei nun $(s_1, s_2, \ldots s_{2p})$ eine beliebige Basis von Periodenwegen, und es mögen:

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_{2p} s_{2p}, \quad \sigma = y_1 s_1 + y_2 s_2 + \cdots + y_{2p} s_{2p}$$

zwei beliebige geschlossene Wege auf $\mathfrak{R}$ sein; dann besteht nach (120b) auf p. 624 für die Charakteristik von s und σ die folgende Gleichung:

$$(122) \qquad (s, \sigma) = \sum_{g,h} (s_g, s_h) x_g y_h = \sum c_{gh} x_g y_h,$$

sie ist also eine bilineare alternierende Form der Zahlensysteme (x_i) und (y_i), deren Koeffizientensystem aus allen Charakteristiken je zweier Wege der Basis (s_i) besteht; dieselbe soll *die Charakteristikenform für jene Basis* genannt werden.

Ersetzt man die Basis (s_i) durch irgend eine andere $(\bar{s}_i)$, welche aus jener durch eine Substitution $(k_{\alpha\beta})$ hervorgeht, so geht die zugehörige Charakteristikenform über in

$$(s, \sigma) = \sum \bar{c}_{gh} \bar{x}_g \bar{x}_h,$$

deren Koeffizientensystem mit dem vorigen durch die Gleichung:

$$(123) \qquad (\bar{c}) = (\bar{k})(c)(k)$$

zusammenhängt.

Zwei Basissysteme $(s_1, \ldots s_{2p})$ und $(\bar{s}_1, \ldots \bar{s}_{2p})$ sollen *äquivalent* heißen, wenn sich die Wege des einen durch die andre Basis *ganzzahlig* ausdrücken, oder was dasselbe ist, sobald sich aus ihnen durch Addition und Subtraktion dieselben Wege ableiten lassen. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn das Substitutionssystem (k) ganzzahlig und unimodular ist, d. h. wenn die Determinante $|k| = \pm 1$ ist. Nennen wir also ganzzahlige bilineare Formen wie gewöhnlich *äquivalent*, wenn sie durch dieselbe ganzzahlige unimodulare Substitution für beide Variablensysteme ineinander übergehen, so ergibt sich der Satz:

Zu äquivalenten Fundamentalsystemen (s_i) und $(\bar{s}_i)$ gehören äquivalente Charakteristikenformen und umgekehrt.

Bekanntlich kann man nun jede alternierende Form von $2p$ Variablen durch elementare umkehrbare ganzzahlige Transformationen auf die folgende äquivalente reduzierte Form bringen:

$$e_1(\bar{x}_1\bar{y}_{p+1} - \bar{x}_{p+1}\bar{y}_1) + e_2(\bar{x}_2\bar{y}_{p+2} - \bar{x}_{p+2}\bar{y}_2) + \cdots + e_p(\bar{x}_p\bar{y}_{2p} - \bar{x}_{2p}\bar{y}_p),$$

wo die positiven Koeffizienten $e_1, e_2, \ldots e_p$ dadurch eindeutig bestimmt sind, daß die Elementarteiler des ursprünglichen Systems der Reihe nach

$$e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots e_p, e_p$$

sind. Jedes e_i ist also ein Teiler des folgenden e_{i+1}. Das Koeffizientensystem dieser reduzierten Form ist daher gleich

$$\begin{pmatrix} 0, & D \\ -D, & 0 \end{pmatrix},$$

wo 0 und D das Nullsystem und das Diagonalsystem p^{ter} Ordnung mit den Diagonalgliedern $e_1, e_2, \ldots e_p$ ist.

Jede Basis $(s_1, s_2, \ldots s_{2p})$ mit den Elementarteilern $e_1, e_2, \ldots e_p$ ist also einer andern Basis $(\bar{s}_1, \ldots \bar{s}_{2p})$ äquivalent, deren Charakteristikenform $\sum e_g(\bar{x}_g\bar{y}_{p+g} - \bar{x}_{p+g}\bar{y}_g)$ reduziert ist und dieselben Elementarteiler besitzt. Zwei Basen sind also dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Charakteristikenformen dieselben Elementarteiler besitzen.

Das zu $(s_1, \ldots s_{2p})$ äquivalente reduzierte Periodensystem $(\bar{s}_1, \ldots \bar{s}_{2p})$ ist also dadurch charakterisiert, daß jeder seiner Wege mit nur einem einzigen anderen eine von Null verschiedene Charakteristik besitzt, daß nämlich allgemein:

$$(\bar{s}_\alpha, \bar{s}_{p+\alpha}) = -(\bar{s}_{p+\alpha}, \bar{s}_\alpha) = e_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots p)$$

ist, während alle anderen Charakteristiken Null sind. Ist endlich $s = x_1\bar{s}_1 + x_2\bar{s}_2 + \cdots + x_{2p}\bar{s}_{2p}$ ein beliebiger Weg, für welchen die x_i also auch rationale Brüche sein können, so bestimmen sich diese Koeffizienten aus der Charakteristikenform $(s, \sigma) = \sum e_g(\bar{x}_g\bar{y}_{p+g} - \bar{x}_{p+g}\bar{y}_g)$ für $\sigma = \bar{s}_{p+g}$ bzw. $\bar{s}_g$

$$(s, \bar{s}_{p+g}) = e_g x_g, \quad (s, \bar{s}_g) = -e_g x_{p+g}.$$

Jene Zahlen x_i fallen daher stets und nur dann ganz aus, wenn für diesen Weg die $2p$ Kongruenzen:

$$(s, \bar{s}_g) \equiv (s, \bar{s}_{p+g}) \equiv 0 \pmod{e_g}$$

sämtlich erfüllt sind. Sind also die Elementarteiler e_g sämtlich gleich Eins, ist also die Charakteristikenform die bilineare Einheitsform, so erhält jeder beliebige Periodenweg ganzzahlige Koeffizienten.

Mit Hilfe der bisher durchgeführten Transformation einer beliebigen Basis (s_i) auf die reduzierte Form $(\bar{s}_i)$ zeige ich nun endlich, daß man für jede *Riemann*sche Fläche auch eine reduzierte Basis:

$$(s^{(1)}, s^{(2)}, \dots s^{(p)}; s^{(p+1)}, s^{(p+2)}, \dots s^{(2p)})$$

finden kann, deren Charakteristikenform die Einheitsform wird, deren Elementarteiler also alle gleich Eins sind. Ein solches System und jedes ihm äquivalente soll *ein Fundamentalsystem* für $\mathfrak{R}$ heißen. Durch ein solches System ist nach der soeben gemachten Bemerkung *jeder* andere Schnitt s *ganzzahlig* homogen d. h. durch Addition und Subtraktion darstellbar. Hiernach bilden also alle geschlossenen Schnitte auf $\mathfrak{R}$ einen endlichen Modul der Ordnung $2p$, dessen Fundamentalsystem ein solches System $(s^{(i)})$ ist.

Um die Existenz solcher reduzierten Fundamentalsysteme zu beweisen, ist nur notwendig, zu zeigen, daß es Basissysteme gibt, für welche die Wege $(s^{(1)}, \dots s^{(2p)})$ sich nicht selbst durchsetzen, die zugehörige Charakteristikenform aber reduziert ist und die Elementarteiler Eins besitzt. Nur die letzte dieser Forderungen bedarf noch der Erläuterung; ihre Erfüllbarkeit ergibt sich ohne weiteres aus dem folgenden leicht beweisbaren Satze:

Ist a ein Periodenweg, welcher nicht zur Hauptklasse gehört und sich nicht durchsetzt, so gibt es stets einen zweiten b, für welchen die Charakteristik $(a, b) = +1$ ist.[72])

Mit Benutzung dieses Satzes kann man nun allein mit Hilfe der vorher entwickelten Theoreme ein Fundamentalsystem auffinden.

Für ein solches ist dann jeder Periodenweg s auf $\mathfrak{R}$ eindeutig in der Form:

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \dots + x_{2p} s_{2p} \tag{123a}$$

darstellbar, worin die x_i ganze Zahlen, nämlich die Charakteristiken

$$x_i = (s, s_{p+i}), \quad x_{p+i} = -(s, s_i) \qquad (i = 1, 2, \dots p) \tag{123b}$$

sind, und für jedes Integral erster oder zweiter Gattung, welches auf diesem Wege s erstreckt wird, ergibt sich die Gleichung:

$$\int_{(s)} dt = x_1 \int_{(s_1)} dt + x_2 \int_{(s_2)} dt + \dots + x_{2p} \int_{(s_{2p})} dt.$$

Jede Periode eines solchen Integrales ist also eine ganzzahlige lineare Verbindung seiner $2p$ Hauptperioden für die Wege $s_1, \dots s_{2p}$, deren Koeffizienten angeben, wie oft der Integrationsweg die Hauptschnitte s_i im positiven bzw. negativen Sinne überschreitet.

72) Vgl. *B.-N.*, p. 428—429. [*O*]

37. Die Periodenrelationen der Integrale erster und zweiter Gattung. Bei der Wahl eines beliebigen Fundamentalsystems (s_i) von Periodenwegen geht die Charakteristikenform $\sum c_{ik}x_iy_k$ in die alternierende Einheitsform $\sum \varepsilon_{ik}x_iy_k$, also das System $C = (c_{ik})$ ihrer Charakteristiken in das alternierende Einheitssystem $\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 0, & E_p \\ -E_p, & 0 \end{pmatrix} = (\varepsilon_{ik})$ über. Ist also jetzt $T = (t_{ik})$ das zum Fundamentalsystem (s_i) gehörige Periodensystem, so geht die Gleichung $\bar{T}\mathsf{E}T = -2\pi i C$ in die einfachere über:

$$\bar{T}\mathsf{E}T = -2\pi i \mathsf{E}. \tag{124}$$

Man kann diese Gleichung auf eine andre Form bringen, wenn man sie vorn mit E multipliziert und beachtet, daß $\mathsf{E}^2 = -1$ ist; aus der dann sich ergebenden Gleichung $(\mathsf{E}\bar{T})(\mathsf{E}T) = 2\pi i$ folgt nämlich, daß $(\mathsf{E}\bar{T})$ und $\frac{1}{2\pi i}(\mathsf{E}T)$ reziprok also miteinander vertauschbar sind, und hieraus ergibt sich leicht

$$T\mathsf{E}\bar{T} = -2\pi i \mathsf{E}. \tag{125}$$

Man erhält so die beiden Sätze:

Die alternierende Hauptform $\sum \varepsilon_{ik}x_iy_k$ geht sowohl durch die kongruenten Transformationen:

$$x_\alpha = \sum t_{\alpha\beta}\bar{x}_\beta, \quad y_\alpha = \sum t_{\alpha\beta}\bar{y}_\beta$$

als auch durch ihre konjugierten:

$$x_\alpha = \sum t_{\beta\alpha}\bar{x}_\beta, \quad y_\alpha = \sum t_{\beta\alpha}\bar{y}_\beta$$

bis auf den Faktor $-2\pi i$ in sich selbst über.

Die beiden Systemgleichungen (124) und (125) fassen je $p(2p-1)$ bilineare Relationen zwischen den $4p^2$ Perioden $t_{\alpha\beta}$ der Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$ zusammen; die erste liefert nämlich ausgeführt die Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{p}(t_{k\alpha}t_{p+k,\beta} - t_{p+k,\alpha}t_{k\beta}) = -2\pi i \varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p), \tag{126}$$

von denen jede diejenigen Perioden aller $2p$ Hauptintegrale enthält, welche sich auf eine bestimmte Kombination zweier Wege s_α und s_β beziehen; die zweite ergibt dagegen die Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{p}(t_{\alpha k}t_{\beta,p+k} - t_{\alpha,p+k}t_{\beta k}) = -2\pi i \varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p); \tag{126a}$$

jede dieser Relationen enthält die sämtlichen $2p$ Perioden je zweier

Hauptintegrale t_α und t_β. Die beiden Formelsysteme (124) und (125) werden gewöhnlich als die *Weierstraß*sche und die *Riemann*sche Form der Bilinearrelationen zwischen den Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung unterschieden, weil die erste sich bei dem *Weierstraß*schen Verfahren der Ableitung aus dem Vertauschungssatze, die zweite bei der *Riemann*schen Methode der Randintegration als die ursprünglichere einstellt; beide Formen sind aber, wie wir soeben gesehen haben, völlig miteinander äquivalent. Im elliptischen Gebilde liefern diese Relationen die eine Gleichung

$$\eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2 = 2\pi i \tag{126b}$$

für die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, welche die *Legendresche Relation* genannt wird.

Geht man in der Gleichung (124) zu den Determinanten über, so ergibt sich $|T|^2 = (-2\pi i)^{2p}$, und eine leichte Determinantenbetrachtung zeigt, daß die Wurzelausziehung

$$|T| = |t_{\alpha\beta}| = (-2\pi i)^p \tag{127}$$

ergibt.

38. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Fundamentalsystemen von Periodenwegen. Ist (s_α) ein Fundamentalsystem von Periodenwegen und (σ_α) ein anderes, so hängen die Wege σ_α mit dem ersten Systeme durch ganzzahlige Gleichungen:

$$\sigma_\alpha = \sum_{(\beta)} m_{\beta\alpha} s_\beta \tag{128}$$

zusammen, deren Koeffizienten

$$m_{\beta\alpha} = (\sigma_\alpha, s_{p+\beta}), \quad m_{p+\beta,\alpha} = -(\sigma_\alpha, s_\beta)$$
$$(\beta = 1, 2, \ldots p)$$

sind. Das Koeffizientensystem $M = (m_{\beta\alpha})$ muß gewissen leicht angebbaren notwendigen und hinreichenden Bedingungen genügen, wenn auch (σ_α) ein Fundamentalsystem sein soll. Sind nämlich wieder $T = (t_{\alpha\beta})$ und $\mathsf{T} = (\tau_{\alpha\beta})$ die zu (s_α) und (σ_α) gehörigen Periodensysteme der Fundamentalintegrale (t_i), so folgt ja aus (128), daß $\mathsf{T} = TM$, daß also, da $|\mathsf{T}| = |T| = (-2\pi i)^p$ ist,

$$|M| = +1$$

sein muß. Diese Bedingung für (M) ist aber nur eine Folge aus einer andern sehr viel inhaltsreicheren. Da nämlich für beide Systeme $\bar{T}\mathsf{E}T = \bar{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathsf{T} = -2\pi i\mathsf{E}$ sein muß, so ergibt sich für $\mathsf{T} = TM$ leicht:

$$\bar{M}\mathsf{E}M = M\mathsf{E}\bar{M} = \mathsf{E},$$

wo die zweite Gleichung aus der ersten, genau wie im vorigen Paragraphen in (125), hergeleitet wird.

Hängen also zwei Fundamentalsysteme (σ_α) und (s_α) durch die Gleichungen (128) zusammen, so geht die Charakteristikenform $\mathsf{E}(x,y)$ sowohl durch die unimodularen Substitutionen:

$$x_\alpha = \sum m_{\alpha\beta}\bar{x}_\beta, \quad y_\alpha = \sum m_{\alpha\beta}\bar{y}_\beta \tag{129}$$

als auch durch die konjugierten Substitutionen:

$$x_\alpha = \sum m_{\beta\alpha}\bar{x}_\beta, \quad y_\alpha = \sum m_{\beta\alpha}\bar{y}_\beta \tag{129a}$$

in sich über.

Es besteht also für die $4p^2$ Substitutionskoeffizienten $m_{\alpha\beta}$ je ein System von $p(2p-1)$ Bedingungsgleichungen, die man analog, wie vorher, in die äquivalenten Formen setzen kann

$$\begin{aligned} \sum(m_{\alpha k}m_{\beta,p+k} - m_{\alpha,p+k}m_{\beta k}) &= \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \sum(m_{k\alpha}m_{p+k,\beta} - m_{p+k,\alpha}m_{k\beta}) &= \varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,2p); \tag{130}$$

aus ihnen folgt die Gleichung $|M| = +1$ genau ebenso wie im vorigen Abschnitte. Für $p = 1$ liefern jene Gleichungen *nur* die Bedingung $|M| = 1$.

Die hier als notwendig begründete Bedingung $\bar{M}\mathsf{E}M = \mathsf{E}$ ist aber auch hinreichend dafür, daß die beiden Systeme (s) und (σ) äquivalent sind. Ist nämlich (s) ein Fundamentalsystem, also $\bar{T}\mathsf{E}T = -2\pi i\mathsf{E}$, M ein beliebiges ganzzahliges System, für welches $\bar{M}\mathsf{E}M = \mathsf{E}$ ist, und setzt man $\mathsf{T} = TM$, so ergibt sich für T ohne weiteres die Gleichung $\bar{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathsf{T} = -2\pi i\mathsf{E}$, welche (nach p. 628) aussagt, daß die Wege $\sigma_\alpha = \sum_{(s)} m_{\beta\alpha}s_\alpha$ ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden.

Den Übergang von dem Periodensystem T zu T durch die Gleichungen $\mathsf{T} = TM$ bezeichnet man als *lineare Transformation der Perioden;* hierbei bezieht sich der Ausdruck „linear" darauf, daß die Determinante $|M|$ den Wert Eins hat. Eine Transformation der Perioden, deren Determinante gleich n ist und bei welcher die Charakteristikenform $E(x,y)$ in ihr n-faches übergeht, heißt *von der n^{ten} Ordnung*; solche Transformationen und die ihnen entsprechenden Zerschneidungen ergeben sich, wenn die Punkte der *Riemann*schen Fläche *mehrdeutig* aufeinander bezogen werden.[72a])

39. Die Perioden der Integrale zweiter und dritter Gattung als Funktionen ihrer Unstetigkeitspunkte. Eine weitere Anwendung der Vertauschungsformel entscheidet die Frage, in welcher Weise die Perioden eines Integrales zweiter oder dritter Gattung mit veränderlichen Unstetigkeitspunkten von diesen abhängen.

Wenden wir zunächst auf das elementare Integral zweiter Gattung mit dem Pole $\mathfrak{P}$ die Gleichung (110) unter der Voraussetzung

72a) Vgl. II B 7, Nr. 9 ff.

an, daß der Weg $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ ein Periodenweg s_α ist, so ergeben sich die $2p$ Gleichungen:

$$(131)\qquad \int\limits_{(s_\alpha)} dt_{\overline{\mathfrak{P}}} = \sum_{k=1}^{p} (t_{k\alpha}\, dt_{p+k}(\overline{\mathfrak{P}}) - t_{p+k,\alpha}\, dt_k(\overline{\mathfrak{P}})), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Die sämtlichen Perioden des Elementarintegrales $t_{\overline{\mathfrak{P}}}$ mit dem einfachen Pole $\overline{\mathfrak{P}}$ sind lineare Kombinationen der für den Punkt $\overline{\mathfrak{P}}$ gebildeten Differentiale der $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, t_2, \ldots, t_{2p}$.

Nach der gleichen Methode bestimmen wir die zyklischen Perioden des Elementarintegrales dritter Gattung und finden die folgenden Gleichungen:

$$(131\,a)\qquad \int\limits_{(s_\alpha)} d\varpi_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} = \sum_{k=1}^{p} \left(t_{k\alpha} \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_{p+k} - t_{p+k,\alpha} \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_k \right),$$

falls der Weg σ von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$ keinen der Periodenwege s_α schneidet; auf dieselbe Weise ergeben sich die logarithmischen Perioden $\int\limits_{(k)} d\varpi_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}$ gleich $\pm 2\pi i$.

Alle zyklischen Perioden des Elementarintegrales dritter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ und den Residuen -1 und $+1$ sind also lineare Kombinationen der $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, t_2 \ldots, t_{2p}$, wenn dieselben von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$ auf einem Wege σ erstreckt werden, der keinen der Periodenwege $s_1, s_2, \ldots, s_{2p}$ schneidet; sie sind also, als Funktionen der Unstetigkeitspunkte betrachtet, Integrale zweiter Gattung; die logarithmischen Perioden sind $\pm 2\pi i$.

Hieraus folgt, daß das Integral

$$(132)\qquad \overline{\varpi}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} = \varpi_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} + \sum_{1}^{p} (c_k t_{p+k} - c_{p+k} t_k),$$

in welchem $\int\limits_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_k = c_k$, $\int\limits_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_{p+k} = c_{p+k}$ gesetzt ist, gar keine zyklischen Perioden besitzt, weil sich diese wegen (131 a) alle forthebeben; und da das Analoge natürlich auch von einem Integrale mit beliebig vielen logarithmischen Stellen und auch von jedem Integrale mit bloß polaren Unstetigkeiten gilt (vgl. p. 617), so erhalten wir den Satz:

Jedes beliebige *Abel*sche Integral ω läßt sich durch Hinzufügung eines Integrals t mit einem einzigen Pole $\mathfrak{P}_\infty$, der von den logarithmischen Stellen von ω verschieden ist, seiner zyklischen Perioden berauben.

Die logarithmischen Perioden des Integrales bleiben dabei ungeändert. Sind also die Residuen von ω durchweg ganze Zahlen m_ν, so besitzt das in der angegebenen Weise reduzierte Integral $\bar{\omega} = \omega + t$ nur noch Perioden der Form $2\pi i m_\nu$; die Exponentialfunktion:

$$e^{\bar{\omega}(\mathfrak{P})} = \Pi_0(\mathfrak{P}) \tag{133}$$

ist also eine eindeutige Funktion des Ortes auf der *Riemann*schen Fläche.

40. Die Primfunktionen. Zerlegung der Funktionen des Körpers in Primfunktionen. Nach den bisher abgeleiteten Resultaten sind wir nun imstande, mit Hilfe der Integrale dritter Gattung Funktionen mit einfacher Nullstelle und einfachem Pole zu bilden, welche aber natürlich im allgemeinen nicht mehr eindeutig auf $\mathfrak{R}$ sind, sondern bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges konstante Faktoren erhalten.

Ist nämlich zunächst $w(\mathfrak{P}) = C_1 w_1 + C_2 w_2 + \cdots + C_p w_p$ ein beliebiges Integral erster Gattung, so ist

$$E(\mathfrak{P}) = e^{w(\mathfrak{P})} \tag{134}$$

eine Funktion, welche auf der ganzen *Riemann*schen Fläche regulär ist und weder Null- noch Unendlichkeitsstellen hat; diese sollen daher als *transzendente Einheitsfunktionen* bezeichnet werden. Ferner ist die Exponentialfunktion

$$\Pi\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_1}\right) = e^{\varpi_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P})}, \tag{135}$$

deren Exponent das vorher bestimmte Integral dritter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ und den Residuen -1, $+1$ ist, dem Divisor $\frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_1}$ zugeordnet, da sie nur in $\mathfrak{Q}_2$ eine Nullstelle und nur in $\mathfrak{Q}_1$ einen Pol erster Ordnung besitzt, in allen anderen Punkten aber eine reguläre Einheitsfunktion ist. Deswegen heiße Π *eine zum Divisor* $\frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_1}$ *gehörige Primfunktion.* Sowohl die Einheits- als die Primfunktionen sind auf $\mathfrak{R}$ nicht eindeutig, sondern sie multiplizieren sich bei Fortsetzung längs eines Periodenweges mit einem Faktor e^c, wenn c der zugehörige Periodizitätsmodul des Exponenten ist. Hierbei bleiben aber bei den Primfunktionen die logarithmischen Perioden außer Betracht, da für sie c ein Multiplum von $2\pi i$ ist.

Ist endlich

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1} \mathfrak{Q}_2^{\mu_2} \ldots \mathfrak{Q}_h^{\mu_h} \quad (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h = 0)$$

irgendein Divisor nullter Ordnung und $\mathfrak{Q}_0$ ein beliebiger Hülfspunkt, so ist die allgemeinste im gleichen Sinne zu $\mathfrak{D}$ gehörige Funktion:

$$(136)\quad P(\mathfrak{P}) = E(\mathfrak{P})\,\Pi\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{D}_0}\right)^{\mu_1} \cdot \Pi\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{D}_0}\right)^{\mu_2} \cdots \Pi\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{D}_h}{\mathfrak{D}_0}\right)^{\mu_h}$$
$$= e^{\mu_1 \varpi_{\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_1} + \mu_2 \varpi_{\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_2} + \cdots + \mu_h \varpi_{\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_h} + C_1 w_1 + C_2 w_2 + \cdots + C_p w_p},$$

weil sie offenbar in $\mathfrak{D}_0$ die Ordnungszahl Null hat und daher genau dem Divisor $\mathfrak{D}$ entspricht.[73])

Ich untersuche nun, unter welchen Bedingungen $\mathfrak{D}$ zur Hauptklasse gehört. Dann muß es möglich sein, die Konstanten C_i so zu bestimmen, daß die den Fundamentalperioden s_α entsprechenden Multiplikatoren e^{c_α} sämtlich gleich 1, ihre Exponenten c_α also Multipla von $2\pi i$ werden. Es müssen also nach (131a) für diese Exponenten die folgenden Gleichungen bestehen:

$$c_\alpha = \sum_{k=1}^{p} (t_{k\alpha} Q_k - t_{p+k,\alpha} Q_{p+k}) = 2\pi i n_\alpha,$$

wo die n_α ganze Zahlen sind und allgemein

$$Q_k = \mu_1 \int_{\mathfrak{D}_0}^{\mathfrak{D}_1} dt_{p+k} + \mu_2 \int_{\mathfrak{D}_0}^{\mathfrak{D}_2} dt_{p+k} + \cdots + \mu_h \int_{\mathfrak{D}_0}^{\mathfrak{D}_h} dt_{p+k},$$

$$Q_{p+k} = \mu_1 \int_{\mathfrak{D}_0}^{\mathfrak{D}_1} dt_k + \mu_2 \int_{\mathfrak{D}_0}^{\mathfrak{D}_2} dt_k + \cdots + \mu_h \int_{\mathfrak{D}_0}^{\mathfrak{D}_h} dt_k - C_k$$

ist; durch Auflösung dieser Gleichungen mit Hülfe der allgemeinen Periodenrelationen (126a) ergeben sich leicht die Bedingungen:

$$Q_k = -\sum_{\alpha=1}^{p} n_\alpha t_{p+k,\,p+\alpha} + \sum_{1}^{p} n_{p+\alpha} t_{p+k,\alpha},$$
$$(k = 1, 2, \ldots p)$$
$$Q_{p+k} = -\sum_{1}^{p} n_\alpha t_{k,\,p+\alpha} + \sum_{1}^{p} n_{p+\alpha} t_{k\alpha},$$

73) Derartige „multiplikative" Funktionen, sowie allgemeiner Funktionensysteme, die sich beim Durchlaufen geschlossener Wege auf der *Riemann*schen Fläche linear substituieren, sind Gegenstand selbständiger Untersuchungen gewesen, insbesondere von *E. Ritter* (Gött. Nachr. 1893/4/5; Math. Ann. 44, 47), der die Formentheorie benutzt und die in geeigneter Weise verallgemeinerten Sätze über Basissysteme heranzieht, und in der letzten Zeit von *R. König*, der auf die homogene Schreibweise verzichtet und die Divisorensymbolik benutzt (vgl. das Referat von *R. König* in den Münch. Ber. 1918, p. 47ff., wo die anderen Arbeiten zitiert werden). Über andere bezügliche Untersuchungen vgl. die Literaturangaben in den *König*schen Arbeiten, sowie *B.*, p. 393—442.

In diesen Untersuchungen gelingt es, auf die multiplikativen Funktionen und allgemeinen Funktionenscharen eine Reihe von Sätzen der Theorie der algebraischen Funktionen auszudehnen, insbesondere den *Riemann-Roch*schen Satz, Partialbruchzerlegung der Integrale usw. [*O*]

von denen die p ersten ein System von notwendigen Bedingungen für die Zugehörigkeit von $\mathfrak{D}$ zur Hauptklasse liefern, während die p letzten dann die p Konstanten C_i bestimmen. Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind aber die zusammengehörigen Perioden der Integrale $t_{p+1}, t_{p+2}, \ldots, t_{2p}, t_1, t_2 \ldots, t_p$, genommen auf einem und demselben Periodenwege

$$s = n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots + n_{2p} s_{2p},$$

für welchen nach (123 b) die Charakteristiken $(s, s_\alpha) = n_\alpha$ sind. Bezeichnen wir also im folgenden wieder die Integrale erster Gattung $t_{p+1}, \ldots t_{2p}$, die hier wieder in eine bevorzugte Stellung rücken, wie früher durch $w_1, \ldots w_p$ und ihre Perioden $t_{p+k,p+l}$ durch $-\omega_{kl}$, die Perioden $t_{p+k,l}$ durch $+\omega_{k,p+l}$, so kann dieses Resultat in dem folgenden Fundamentalsatz zusammengefaßt werden:

Wenn für einen Divisor $\mathfrak{D}$ der Ordnung Null die p Summen von Integralen erster Gattung:

$$(137) \qquad Q_k = \mu_1 \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_1} dw_k + \mu_2 \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_2} dw_k + \cdots + \mu_h \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_h} dw_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

ein System zusammengehöriger Periodizitätsmoduln für einen und denselben geeignet gewählten Periodenweg $s = n_1 s_1 + \cdots + n_{2p} s_{2p}$ bilden, so daß die Gleichungen

$$(137\,a) \qquad Q_k = \int_{(s)} dw_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

sämtlich erfüllt sind, so gehört dieser Divisor zur Hauptklasse.

Die Umkehrbarkeit dieses Satzes wird sich aus dem *Abel*schen Theorem ergeben.

Während die hier benutzten Primfunktionen, abgesehen von Polen, regulär aber nicht eindeutig sind, kann man dem Vorgange von *Weierstraß* folgend an ihrer Stelle auch solche Primfunktionen einführen, welche auf $\mathfrak{R}$ durchweg eindeutig sind und dafür eine wesentliche Singularität nach Art der Exponentialfunktion besitzen, die beim Übergang zum Logarithmus zu einer polaren Unstetigkeit wird. Man kann nämlich nach der Bemerkung am Schluß des vorigen Paragraphen zu $\varpi_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ ein solches Integral zweiter Gattung mit dem Pole $\mathfrak{P}_\infty$ hinzufügen, daß $\bar{\varpi}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = \varpi_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} + t$ gar keine zyklischen Perioden besitzt, so daß also

$$e^{\bar{\varpi}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}} = \Pi_0\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_1}\right)$$

auf $\mathfrak{R}$ eindeutig ist. Dasselbe gilt von einem Produkte

$$P_0 = \Pi_0\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_0}\right)^{\mu_1} \dots \Pi_0\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_h}{\mathfrak{Q}_0}\right)^{\mu_h}, \tag{138}$$

und dieses besitzt in $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots \mathfrak{Q}_h$ Nullstellen oder Pole, hat aber überdies noch in $\mathfrak{P}_\infty$ eine wesentliche Singularität von der Art, daß sein Logarithmus daselbst wie ein Integral zweiter Art unendlich wird. Will man dann aus dem Komplexe der so erhaltenen Funktionen die Größen von der Hauptklasse aussondern, so hat man die Bedingung dafür aufzustellen, daß die singuläre Stelle bei $\mathfrak{P}_\infty$ fortfällt. Auch hierfür ergeben sich p Gleichungen, da es p eigentliche Integrale zweiter Gattung gibt.

41. Das Abelsche Theorem als Additionsprinzip der Integrale. Zum *Abel*schen Theorem in seiner allgemeinsten Gestalt führt die folgende einfache Betrachtung: Es seien $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_r$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_r$ zwei beliebige äquivalente ganze Divisoren und also $x = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ eine algebraische Funktion r^{ter} Ordnung. Ist dann $\mathfrak{R}_x$ die zugehörige r-blättrige *Riemann*sche Fläche, $\mathfrak{K}_x$ die einblättrige Kugelfläche, so entsprechen jedem Punkte $\mathfrak{p}$ $(x = a)$ auf $\mathfrak{K}_x$ die r Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_r$ auf $\mathfrak{R}_x$, speziell gehören zum Punkte $\mathfrak{p} = \infty$ und $\mathfrak{p} = 0$ die Punkte $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$; jedem Wege etwa von ∞ nach 0 entsprechen die r kongruenten genau untereinander verlaufenden Wege, welche bei geeigneter Bezeichnung von $\mathfrak{A}_i$ nach $\mathfrak{B}_i$ führen.

Ist nun für x als unabhängige Variable

$$dw = \zeta_x \cdot dx$$

die Darstellung eines ganz beliebigen *Abel*schen Differentiales und sind $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ die r konjugierten Werte von ζ_x, so besteht für die Spur $S(\xi_x)$ eine Gleichung

$$S(\xi_x) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r = R(x),$$

wo $R(x)$ eine bestimmte rationale Funktion von x bedeutet. Multipliziert man diese Gleichung mit dx, integriert sie rechts zwischen ∞ und 0 auf einem beliebigen Wege, welchem links die kongruenten Wege von $\mathfrak{A}_i$ nach $\mathfrak{B}_i$ entsprechen, so ergibt sich das allgemeine *Abel*sche Theorem in der Gleichung:

$$\int_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} d\omega + \int_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} d\omega + \dots + \int_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} d\omega = \int_{\infty}^{0} R(x)\, dx. \tag{139}$$

Nach dem *Abel*schen Theorem können also Integrale mit gleichem Integranden durch das Integral einer rationalen Funktion summiert werden, sobald die Vereinigung ihrer unteren und ihrer oberen Grenzen zwei ganze Divisoren derselben Klasse liefert.

Ich spezialisiere das *Abel*sche Theorem zunächst für die drei Hauptfälle, daß $d\omega$ ein Integral erster, zweiter oder dritter Gattung ist. In diesen Fällen liefert der Hilfssatz (72) über die Spur von Funktionen des Körpers unmittelbar die folgenden Resultate:

1. Für Integrale erster Gattung ist stets:

$$\int_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} dw + \int_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} dw + \cdots + \int_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} dw = 0, \tag{139 a}$$

wenn wie immer die Integrale auf übereinander verlaufenden Wegen in der Fläche $\mathfrak{R}_x$ geleitet werden.

2. Ist zweitens $t_\mu = \int \xi dx$ ein Elementarintegral zweiter Gattung mit dem μ-fachen Pole $\mathfrak{Q}$, welcher auf $\mathfrak{R}_x$ ein α-blättriger Verzweigungspunkt sein mag, und ist q der Wert, welchen x in $\mathfrak{Q}$ annimmt, so folgt aus demselben Hilfssatz fast unmittelbar, daß die Summe

$$\int_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} dt_\mu + \int_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} dt_\mu + \cdots + \int_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} dt_\mu \tag{139 b}$$

eine ganze Funktion des $\left[\frac{\mu}{\alpha}\right]^{\text{ten}}$ Grades von $\frac{1}{q}$ ist, deren Koeffizienten durch die des Hauptteiles der für die Umgebung von $\mathfrak{Q}$ geltenden Reihenentwicklung von ξ bestimmt sind.

3. Ist endlich $\varpi_{12} = \int \xi dx$ ein Elementarintegral dritter Gattung mit den logarithmischen Stellen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ und den Residuen -1 und $+1$, so liefert dieser Hilfssatz sofort die Gleichung:

$$\int_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} d\varpi_{12} + \int_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} d\varpi_{12} + \cdots + \int_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} d\varpi_{12} = \lg \frac{q_2}{q_1}, \tag{139 c}$$

wenn q_1 und q_2 die Werte sind, welche x in $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ annimmt.

Die bisher in diesem Abschnitt aufgestellten Integralsätze waren an die Bedingung geknüpft, daß alle Integrationswege $l_h = \overline{\mathfrak{A}_h \mathfrak{B}_h}$ in $\mathfrak{R}_x$ übereinanderlaufen, daß diese Wege also auf einer anderen Fläche $\mathfrak{R}_z$ *in ganz bestimmter* Weise von $\mathfrak{A}_h$ nach $\mathfrak{B}_h$ geführt werden. Es ist leicht, sich von dieser Beschränkung freizumachen: Erstreckt man nämlich diese Integrale in einer Fläche $\mathfrak{R}_z$ auf beliebigem Wege λ_h von $\mathfrak{A}_h$ nach $\mathfrak{B}_h$, so tritt zu den Gleichungen des *Abel*schen Theorems in jedem Falle nur eine Periode hinzu, und es ist wesentlich, sich klarzumachen, daß die ganzen Zahlen, welche die spezielle Periode charakterisieren, bei allen Integralen erster und zweiter Gattung allein von den Integrationswegen, nicht aber von den Integranden abhängen, daß also bei Anwendung des *Abel*schen Theorems auf ein System

von Integralen die auftretenden Perioden sich sämtlich auf den gleichen Weg beziehen und daher dasselbe Koeffizientensystem erhalten.

Für Integrale erster Gattung kann man somit das allgemeinste *Abel*sche Theorem in der folgenden Form aussprechen, in welcher es die genaue Umkehrung des Fundamentalsatzes (137) ist:

Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1}\mathfrak{Q}_2^{\mu_2}\dots\mathfrak{Q}_h^{\mu_h}$ ein Divisor der Hauptklasse, so bilden die p Summen von Integralen erster Gattung:

$$(140)\quad \mu_1 w_k(\mathfrak{Q}_1) + \dots + \mu_h w_k(\mathfrak{Q}_h) = n_1\omega_{k1} + n_2\omega_{k2} + \dots + n_{2p}\omega_{k,2p} \qquad (k = 1, 2, \dots p)$$

ein System zusammengehöriger Periodizitätsmoduln der Integrale $w_1, w_2, \dots w_p$.

Hiernach und nach (137) bilden diese p Gleichungen die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Divisor der Ordnung Null der Hauptklasse angehört.

Um diesen Satz und die aus ihm zu ziehenden Folgerungen einfacher aussprechen und übersehen zu können, wollen wir zwei beliebige Zahlensysteme $(a_1, a_2, \dots a_p)$ und $(b_1, b_2, \dots b_p)$ *kongruent* nennen $((a_k) \equiv (b_k))$, wenn sich je zwei entsprechende Elemente a_k und b_k nur um zusammengehörige Perioden $\int\limits_{(s)} dw_k$ der p Integrale erster Gattung unterscheiden, wenn also die p Gleichungen:

$$a_k = b_k + n_1\omega_{k1} + n_2\omega_{k2} + \dots + n_{2p}\omega_{k,2p} \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

für dasselbe ganzzahlige System $n_1, n_2, \dots, n_{2p}$ erfüllt sind. Solche Kongruenzen können offenbar addiert und subtrahiert werden. Dann nehmen die Gleichungen (140) des *Abel*schen Theorems die einfachere Form an:

$$(140\,a)\qquad \mu_1 w_k(\mathfrak{Q}_1) + \mu_2 w_k(\mathfrak{Q}_2) + \dots + \mu_h w_k(\mathfrak{Q}_h) \equiv 0.$$

Wir wollen zweitens durch eine einfache Modifikation die Beschränkung auf Divisoren der Ordnung Null beseitigen. Wählen wir als untere Grenze der Integrale $w_1, w_2, \dots, w_p$ (wie in Nr. 33) den Punkt $\mathfrak{P}_\infty$, und ist P_∞ seine Klasse, so sind dieselben Gleichungen (140a) für einen beliebigen Divisor $\mathfrak{D}$ dann und nur dann erfüllt, wenn $\mathfrak{D}$ einer der Klassen P_∞^ϱ, also der durch P_∞ erweiterten Hauptklasse $(\dots P_\infty^{-2}, P_\infty^{-1}, 1, P_\infty, P_\infty^2, \dots)$ angehört, weil die dann hinzutretenden bzw. fortfallenden Integrale $\int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_\infty} dw$ kongruent Null sind.

Betrachten wir nun ganz allgemein einen Divisor

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1}\mathfrak{Q}_2^{\mu_2}\dots\mathfrak{Q}_h^{\mu_h}$$

einer ganz beliebigen Klasse so möge für ihn

$$\mu_1 w_k(\mathfrak{Q}_1) + \cdots + \mu_h w_k(\mathfrak{Q}_h) \equiv v_k \quad (k = 1, 2, \ldots p) \tag{140 b}$$

sein. Dann heiße $(v_k) = (v_1, \ldots, v_p)$ *das dem Divisor* $\mathfrak{D}$ *entsprechende Wertsystem.* Dann entspricht also nach dem *Abel*schen Theorem der durch P_∞ erweiterten Hauptklasse das Wertsystem $(0, \ldots, 0)$. Sind ferner $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ zwei beliebige Divisoren, (v_k) und (v_k') ihre Wertsysteme, so entsprechen den Divisoren $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ und $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}'}$ die Wertsysteme $(v_k + v_k')$, und $(v_k - v_k')$, und $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ sind stets und nur dann in bezug auf die Klasse P_∞ äquivalent, wenn $(v_k) \equiv (v_k')$ ist. Sieht man also kongruente Wertsysteme als nicht wesentlich verschieden an, so entspricht jeder Klasse relativ äquivalenter Divisoren ein und nur ein Wertsystem. Jede solche Klasse wird durch ein System von p Zahlen $(v_1, v_2, \ldots v_p)$ charakterisiert. Hier ist aber zu bemerken, daß das Wertsystem (v_k), welches einem Divisor von nicht verschwindender Ordnung entspricht, von der Auswahl des Punktes $\mathfrak{P}_\infty$ abhängig ist und bei Veränderung dieses Punktes sich ebenfalls ändert; allein für die Divisoren der Ordnung Null ist das entsprechende Wertsystem (v_k) wegen der Gleichung $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h = 0$ von der Auswahl von $\mathfrak{P}_\infty$ unabhängig.

42. Die aus dem Abelschen Theorem folgenden Reduktionsprobleme. Das *Abel*sche Theorem ermöglicht nun die vollständige Lösung der folgenden Fundamentalaufgabe:

Es sei ein ganz beliebiger Divisor der Ordnung d

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1} \mathfrak{Q}_2^{\mu_2} \ldots \mathfrak{Q}_h^{\mu_h} \quad (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h = d)$$

und ein Primteiler $\mathfrak{P}_\infty$ gegeben. Dann sollen die zugehörigen p Integralsummen:

$$s_i = \mu_1 \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_1} dw_i + \cdots + \mu_h \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_h} dw_i$$

durch p andere Integralsummen:

$$\sigma_i = \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_1} dw_i + \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_2} dw_i + \cdots + \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_q} dw_i$$

mit gleicher unterer Grenze und möglichst wenigen Summanden so ersetzt werden, daß allgemein $s_i \equiv \sigma_i$, daß also bei geeignet gewählten Integrationswegen $s_i = \sigma_i$ wird.

Sind D und P_∞ die zu $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{P}_\infty$ gehörigen Klassen, so stimmt diese Aufgabe mit der folgenden überein:

Es soll die kleinste Potenz P_∞^e von P_∞ so bestimmt werden, daß

$$\{D P_\infty^e\} = 1$$

ist. Ist nämlich diese Bedingung erfüllt und $q = d + e$ die Ordnung der Klasse DP_∞^e, so gibt es in dieser einen einzigen ganzen Divisor $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_q$, für welchen $\mathfrak{D}\mathfrak{P}_\infty^e = \mathfrak{D}\mathfrak{P}_\infty^{q-d} \sim \mathfrak{G}$, also

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}_\infty^d} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\infty^q}$$

ist, und aus dieser Äquivalenz folgen nach dem *Abel*schen Theorem die p Kongruenzen $s_i \equiv \sigma_i$ und umgekehrt. Wir haben hiernach nur noch die Ordnung q von $\mathfrak{G}$ zu bestimmen und dann diesen Divisor selbst darzustellen.

Aus dem *Riemann-Roch*schen Satze ergibt sich zunächst unmittelbar, daß q gleich p oder kleiner als p sein muß, und daß der letzte Fall nur ausnahmsweise auftreten kann, weil die obere Grenze p z. B. immer dann erreicht wird, wenn $\mathfrak{D}$ aus p willkürlich ausgewählten Primteilern besteht.

Eine beliebige Anzahl von *Abel*schen Integralen erster Gattung läßt sich also stets in eine Summe von nur p, im allgemeinen aber nicht in eine Summe von weniger als p Integralen mit fester unterer Grenze zusammenfassen.

Die wirkliche Darstellung des zu $\mathfrak{D}$ gehörigen Divisors $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_p$ brauchen wir nur in den beiden Hauptfällen durchzuführen, in denen $\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \dots \mathfrak{Q}_r$ ein ganzer Divisor mit beliebigen Primfaktoren oder aber der reziproke eines solchen ist; einmal nämlich kommen diese Fälle vorzugsweise bei den Anwendungen in Betracht, und zweitens kann der allgemeinste Fall leicht auf diese reduziert werden. In diesen beiden Fällen sind zu den p Integralsummen:

$$s_i = \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_1} dw_i + \dots + \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_r} dw_i$$

die Summen

$$\sigma_i = \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_1} dw_i + \dots + \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_p} dw_i$$

so hinzuzufügen, daß die p Kongruenzen

$$s_i - \sigma_i \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad s_i + \sigma_i \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

erfüllt sind. Ferner erkennt man leicht, daß die erste Reduktionsaufgabe durch zweimalige Lösung der zweiten gelöst werden kann. Ist nämlich $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \dots \mathfrak{R}_p$ zuerst für $\mathfrak{D}$ so bestimmt, daß für seine Integralsummen ϱ_i $s_i + \varrho_i \equiv 0$ ist, und bestimmt man weiter zu $\mathfrak{R}$ den Divisor $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_p$ so, daß seine Integralsummen σ_i die Kongruenzen $\varrho_i + \sigma_i \equiv 0$ erfüllen, so folgt durch Subtraktion jener beiden Systeme, daß wirklich $s_i - \sigma_i \equiv 0$ ist. Wir wollen daher nur

den zweiten Fall untersuchen, obwohl der erste auch direkt leicht behandelt werden kann.[74])

Sind nun r beliebige Punkte $\mathfrak{Q}_i = (z_i, u_i)$ gegeben, und sind die p Punkte $\mathfrak{P}_k = (\xi_k, \eta_k)$ so zu bestimmen, daß die p Kongruenzen $s_i + \sigma_i \equiv 0$ erfüllt sind, so ist diejenige Funktion

$$\psi(z, u) = \frac{\mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_r \cdot \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_p}{\mathfrak{P}_\infty^{r+p}} = \frac{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\infty^{r+p}}$$

zu bestimmen, welche ein Multiplum von $\frac{\mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_r}{\mathfrak{P}_\infty^{r+p}}$ ist.

Ist nun $r \geqq p-1$ oder r ganz beliebig, aber $\mathfrak{P}_\infty$ nicht gerade ein *Weierstraß*punkt, so ist nach dem *Riemann-Roch*schen Satze $\{\mathfrak{P}_\infty^{r+p}\} = r+1$; es gibt dann also genau $r+1$ linear unabhängige Funktionen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$ mit dem Nenner $\mathfrak{P}_\infty^{r+p}$, welche leicht aus dem zu $\mathfrak{P}_\infty$ gehörigen normalen Fundamentalsystem zu finden sind. Also ist die gesuchte Funktion $\psi = C_0\psi^{(0)} + C_1\psi^{(1)} + \dots + C_r\psi^{(r)}$, wo nur die Konstanten C_i so zu wählen sind, daß $\psi(\mathfrak{Q}_i) = 0$ ist. Setzt man also zur Abkürzung allgemein $\psi^{(h)}(\mathfrak{Q}_\varrho) = \psi_\varrho^{(h)}$, so ist die gesuchte Funktion ψ durch die Gleichung:

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi^{(0)}, & \psi^{(1)}, & \dots \psi^{(r)} \\ \psi_1^{(0)}, & \psi_1^{(1)}, & \dots \psi_1^{(r)} \\ \vdots & & \\ \psi_r^{(0)} & \psi_r^{(1)}, & \dots \psi_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

eindeutig bestimmt, falls nur die Matrix $(\psi_\varrho^{(h)})$ vom Range r ist, und der Übergang zur Norm ergibt $n(\mathfrak{G}) = \frac{n(\psi)}{n(\mathfrak{D})}$; d. h.:

$$\frac{n(\psi)}{(z-z_1)\dots(z-z_r)} = \chi_0 z^p + \chi_1 z^{p-1} + \dots + \chi_p = \chi_0(z-\xi_1)\dots(z-\xi_p);$$

die Zerlegung dieses Quotienten in seine Linearfaktoren liefert die z-Koordinaten ξ_k der p gesuchten Punkte $\mathfrak{P}_k$. Zu ihrer Bestimmung bedarf man also der Auflösung einer Gleichung p^{ten} Grades, deren Koeffizienten rational von $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots, \mathfrak{Q}_r$ abhängen. Die zugehörigen Werte η_k folgen aus den Gleichungen $\psi(\xi_k, \eta_k) = 0$. Die Anwendung dieser Betrachtungen auf die Gleichung $u^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$ liefert z. B. das Additionstheorem für die $\wp$-Funktion.

43. Das Umkehrproblem für die Abelschen Integrale. Durch die Auseinandersetzungen von Nr. **41** Ende ist festgestellt worden, daß jedem beliebigen Divisor $\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1}\mathfrak{Q}_2^{\mu_2}\dots\mathfrak{Q}_h^{\mu_h}$ durch die p Gleichungen:

$$(141) \quad \mu_1 \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_1} dw_i + \mu_2 \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_2} dw_i + \dots + \mu_h \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_h} dw_i \equiv c_i \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

74) Vgl. *H.-L.*, p. 685—691.

ein Wertsystem $(v_1, \ldots, v_p)$ zugeordnet wird, welches nur nach seinem Kongruenzwert modulo der Perioden in Betracht kommt, und daß solchen Divisoren, welche im eigentlichen Sinne oder auch nur in bezug auf die Klasse P_∞ von $\mathfrak{P}_\infty$ äquivalent sind, kongruente Wertsysteme entsprechen.

Durch die letzten Entwickelungen aber hat sich ergeben, daß jeder beliebige Divisor durch einen und im allgemeinen auch nur einen ganzen Divisor der Ordnung p: $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_p$, das obige System (141) also durch folgendes:

$$\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_1} dw_i + \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_2} dw_i + \cdots + \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_p} dw_i \equiv v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{141a}$$

ersetzt werden kann. Man kann also die Untersuchung auf *die ganzen Divisoren der Ordnung p* beschränken; jeder derselben konstituiert aber eine Klasse, deren Dimension nach dem *Riemann-Roch*schen Satze im allgemeinen gleich Eins und nur dann größer als Eins ist, wenn $\mathfrak{G}$ in einem ganzen Differentialteiler enthalten ist; es entsprechen also verschiedenen Divisoren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ im allgemeinen auch verschiedene Systeme (v_i) und (v_i').

Es entsteht nun die Frage, ob umgekehrt zu jedem Wertsystem (v_i) ein ganzer Divisor $\mathfrak{G}$ der Ordnung p gefunden werden kann, so daß die Gleichungen (141 a) erfüllt sind; ist dies aber der Fall, so ist nach unseren Ergebnissen das Punktsystem $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_p)$ im allgemeinen auch *eindeutig* bestimmt. Das so sich ergebende Problem heißt das *Jakobische Umkehrproblem*[74a]) und bildet die naturgemäße Verallgemeinerung des Umkehrproblems der elliptischen Integrale; denn dies besteht ja darin, aus der Gleichung

$$\int_{\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}} dw \equiv v \pmod{\omega_1, \omega_2}$$

die Größen des Körpers $K(z, u)$, welche sämtlich eindeutige Funktionen von $\mathfrak{P}$ sind, als Funktionen von v darzustellen; wie dies auf die elliptischen, so führt das allgemeine Problem auf die sogenannten *Abel*schen Funktionen.

Die Antwort auf die obengestellte Frage fällt bejahend aus; der Beweis erfolgt entweder durch direkte Integration des Systems von Differentialgleichungen:

$$dw_i(\mathfrak{P}_1) + dw_i(\mathfrak{P}_2) + \cdots + dw_i(\mathfrak{P}_p) = dv_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

welches ja mit dem System (141 a) im wesentlichen gleichwertig ist,

74a) II B 7, Nr. 1.

oder durch Aufstellung und Benutzung der sogenannten *Jacobi*schen oder *Thetafunktionen* von p Variablen $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Die Ausführung dieser Untersuchung liegt außerhalb der Grenzen dieser Darstellung, welche mit der Einordnung des transzendenten Umkehrproblems in den Bereich der algebraischen Fragestellungen ihren Abschluß finden soll.

VII. (Anhang.) Arithmetische Theorie der algebraischen Zahlen.

44. Der Körper $\Re(1)$ der rationalen Zahlen und der Körper $K(p)$ der p-adischen Zahlen.[75]) Die in I und II auseinandergesetzten Prinzipien führen auch zu einer vollständigen Theorie der rationalen und algebraischen Zahlen. Als Aufgabe der ersteren kann die Aufsuchung der Beziehungen bezeichnet werden, welche zwischen den rationalen Zahlen einerseits und einer beliebig angenommenen festen Grundzahl andererseits bestehen, welche letztere gleich als eine Primzahl p vorausgezetzt werden kann.

Alle rationalen Zahlen $A = \frac{a}{b}$ bilden einen *Körper* $\Re(1)$. Eine solche Zahl heißt *ganz* oder *gebrochen* in bezug auf p oder *modulo* p, je nachdem in ihrer reduzierten Darstellung $\frac{a}{b}$ der Nenner p nicht enthält oder durch p teilbar ist.[76]) A heißt durch B *teilbar*, wenn $\frac{A}{B}$ modulo p ganz ist. Eine Zahl ε heißt eine *Einheit*, wenn ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ modulo p ganz sind. Jede Zahl A ist eindeutig in der Form εp^α darstellbar, wo ε eine Einheit bedeutet; α heißt die *Ordnungszahl von* A. Die Ordnungszahl eines Produktes bzw. eines Quotienten ist die Summe bzw. die Differenz seiner Komponenten. Eine Zahl A heißt durch p^ϱ *teilbar*, wenn ihre Ordnungszahl α wenigstens gleich ϱ ist; zwei Zahlen sind *kongruent modulo* p^ϱ, wenn ihre Differenz durch p^ϱ teilbar ist. Zwei Zahlen heißen *gleich für den Bereich von* p, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von p kongruent, wenn sie also identisch sind.

Die rationalen Zahlen bilden nun einen Teilbereich des folgenden Zahlenreiches. Jede Zahlgröße:

$$A = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots,$$

deren Koeffizienten $a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots$ modulo p ganze rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ sind, welche beliebig weit berechnet werden können, wird eine *p-adische*

75) Vgl. Nr. I dieses Referates.

76) Vgl. Anm. 3.

Zahl genannt, und die rationalen Zahlen $a_\alpha p^\alpha$, $a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1}$, ... heißen ihre *Näherungswerte*. Zwei Zahlen A und A' sind *kongruent modulo* p^ϱ, wenn *fast alle* ihre Näherungswerte modulo p^ϱ kongruent sind; sie sind *gleich für den Bereich von* p, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von p kongruent sind. Bei dieser Definition der Gleichheit und der gewöhnlichen Festsetzung über die Addition und die Multiplikation p-adischer Zahlen bilden diese einen Zahlkörper $K(p)$ welcher dem in Nr. 3 eingeführten Körper $\overline{K}(\mathfrak{p})$ aller konvergenten und nicht konvergenten Potenzreihen für die Stelle $\mathfrak{p}$ völlig entspricht.

Jede rationale Zahl $A = \frac{a}{b}$ von $\Re(1)$ ist nun einer einzigen p-adischen Zahl $a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \cdots$ gleich; also ist wirklich $\Re(1)$ ein Teilkörper von $K(p)$, und zwar derjenige, in welchem die Koeffizienten a_ϱ, $a_{\varrho+1}$, ... jedesmal linearen Rekursionsformeln genügen. Die arithmetische Untersuchung der rationalen Zahlen für den Bereich von p fällt hiernach mit derjenigen der p-adischen Zahlen zusammen, und diese kann genau ebenso geführt werden, wie dies in Nr. 2 für die Potenzreihen des Körpers $\overline{K}(\mathfrak{p})$ für die Stelle $\mathfrak{p}$ $(z = \alpha)$ geschieht.

Hier werden noch die folgenden Bemerkungen hinzugefügt: Ist p eine beliebige *ungerade* Primzahl, so enthält der Körper $K(p)$ $p-1$ $(p-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzeln und keine andere Einheitswurzel. Im Körper $K(2)$ ist nur die zweite Einheitswurzel -1 vorhanden. Für ein ungerades p ist jede p adische Zahl A eindeutig in der Form $A = p^\alpha w^\beta (1+p)^\gamma$ darstellbar, in welcher w eine primitive $(p-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel ist, α die Ordnungszahl von A und β, der sog. *Index* von α, eine der Zahlen $0, 1, \ldots p-1$ bedeutet; endlich ist γ eine ganze p-adische Zahl; für $p = 2$ ist $A = 2^\alpha (-1)^\beta 5^\gamma$ die entsprechende dyadische multiplikative Darstellung von A. Das Exponentensystem (α, β, γ) wird der *Logarithmus von A für den Bereich von p genannt.*

45. Die algebraischen Zahlkörper und die ihnen isomorphen rationalen Kongruenzkörper.[77]) Der Gegenstand der Theorie der algebraischen Zahlen in ihrem allgemeinsten Umfange ist die Untersuchung der Teilbarkeitseigenschaften aller algebraischen Zahlen eines durch die Wurzel einer ganzzahligen Gleichung definierten Zahlkörpers. Hierzu würde noch die Betrachtung der Größenbeziehungen treten, welche zwischen denselben Zahlen bestehen; diese zweite Untersuchung kann ganz ebenso wie die erste durchgeführt werden, auf sie soll in der folgenden kurzen Darstellung nicht besonders eingegangen werden.

77) Vgl. Nr. II dieses Referates.

Es sei $F(x) = 0$ eine im Körper $\Re(1)$ aller rationalen Zahlen irreduzible Gleichung n^{ten} Grades und ξ eine Wurzel derselben in irgendeinem Erweiterungskörper $\Re(\xi)$; dann ist $\Re(\xi)$ einstufig isomorph dem Kongruenzkörper $K(x, \bmod F(x)) = K(x, 1)$ aller modulo $F(x)$ ganzen rationalen Funktionen von x mit rationalen Zahlkoeffizienten für diese Funktion als Modul, und dieser kann und soll daher statt $\Re(\xi)$ weiter untersucht werden.

Die oben gestellte Aufgabe der Theorie der algebraischen Zahlen ist nun vollständig gelöst, wenn man die Teilbarkeitsbeziehungen aller Zahlen von $\Re(\xi)$ oder, was dasselbe ist, aller Funktionen von $K(x, 1)$ zu einer beliebigen reellen Primzahl p kennt; sie sollen daher im folgenden untersucht werden.

46. Untersuchung der rationalen Kongruenzkörper für den Bereich einer Primzahl p. Ihre Reduktion auf die p-adischen Kongruenzkörper. Bei dieser Untersuchung können und sollen nun die rationalen Zahlkoeffizienten aller Funktionen von $K(x, 1)$ nach Potenzen von p entwickelt, d. h. durch die ihnen gleichen p-adischen Zahlen ersetzt werden. Dann bildet der Bereich $K(x, 1)$ einen Teilkörper des größeren Bereiches

$$R(x, p) = R_p(x, \bmod F(x)) \tag{142}$$

aller modulo $F(x)$ ganzen Funktionen von x mit *beliebigen* p-adischen Koeffizienten in der Weise, daß jedes Element von $K(x, 1)$ einem solchen von $R(x, p)$ gleich ist, während umgekehrt jedes Element von $R(x, p)$ der Grenzwert einer Folge von Elementen von $K(x, 1)$ ist. Es kann und soll daher statt des Zahlkörpers $\Re(\xi)$ bzw. des Kongruenzkörpers $K(x, 1)$ dieser Bereich $R(x, p)$ auf die Teilbarkeitseigenschaften seiner Elemente untersucht werden.

Dieser neue größere Bereich $R(x, p)$ unterscheidet sich nun von seinem Teilkörper $K(x, 1)$ ganz wesentlich dadurch, daß im rationalen Körper $\Re(1)$ $F(x)$ unzerlegbar ist, während dieser Modul in dem größeren Körper $K(p)$ im allgemeinen in ein Produkt von eindeutig bestimmten Primfaktoren mit p-adischen Koeffizienten zerfällt, welche aber immer voneinander verschieden sind. Es sei nun

$$F(x) = f_1(x,p) \cdot f_2(x,p) \cdots f_\nu(x,p) \qquad (p) \tag{143}$$

jene Zerlegung von $F(x)$ in p-adische Primfaktoren und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ seien ihre Grade. Dann ist der Bereich $R(x,p)$ ein Kongruenzring, welcher sich in einfacher Weise auf die ν p-adischen Kongruenzkörper:

$$K_i(x,p) = K_i(x, \bmod f_i(x,p)) \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu) \tag{143a}$$

aller in bezug auf je ein $f_i(x, p)$ ganzen rationalen Funktionen von x, modulo $f_i(x,p)$ betrachtet, reduziert.

Sind nämlich $1_1, 1_2, \ldots 1_\nu$ ν Funktionen des Ringes $R(x,p)$, welche so gewählt sind, daß allgemein:

(144) $\quad 1_i \equiv 1 \pmod{f_i(x,p)} \qquad 1_i \equiv 0 \pmod{f_k(x,p)} \qquad (i \gtrless k)$

ist, und welche durch das Euklidische Teilerverfahren unmittelbar bestimmt werden können, so ist jedes Element $v(x)$ von R eindeutig in der Form:

(144a) $\quad v \equiv v_1 \cdot 1_1 + v_2 \cdot 1_2 + \cdots + v_\nu \cdot 1_\nu = (v_1, v_2, \ldots v_\nu) \pmod{F(x)}$

darstellbar, wo allgemein $v_i \equiv v \pmod{f_i(x,p)}$ der Wert von v im Ringe $K_i(x,p)$ ist, und umgekehrt gehört zu jedem System $(v_1, v_2, \ldots v_\nu)$, dessen Elemente in den Körpern $K_i(x,p)$ ganz beliebig angenommen sind, ein einziges Element $v = (v_1, v_2, \ldots v_\nu)$, welches allgemein in $K_i(x,p)$ gerade den Wert v_i hat.

Sind ferner $v = (v_i)$, $w = (w_i)$ zwei beliebige Elemente von R in dieser Darstellung, so ergeben sich für die Summe, Differenz, Produkt und Quotient derselben die entsprechenden Darstellungen:

$$v \pm w = (v_i \pm w_i), \quad vw = (v_i w_i), \quad \frac{v}{w} = \left(\frac{v_i}{w_i}\right);$$

die letzte Gleichung besteht aber dann und nur dann, wenn $\frac{v}{w}$ wirklich dem Ringe R angehört, wenn nämlich alle Komponenten w_i des Nenners von Null verschieden sind. Durch diese Darstellung $v = (v_i)$ aller Elemente von R wird also der ganze Ring einstufig isomorph auf das System $(K_1(x,p), \ldots K_\nu(x,p))$ der ν Kongruenzkörper $K_i(x,p)$ abgebildet, wenn für zwei Elemente (v_i) und (w_i) die Addition und die Multiplikation durch die Gleichungen:

(144b) $\quad (v_i) + (w_i) = (v_i + w_i), \quad (v_i) \cdot (w_i) = (v_i w_i)$

definiert wird. Hierdurch ist die allgemeine Aufgabe der arithmetischen Theorie der algebraischen Zahlen vollständig auf die Untersuchung der Teilbarkeitseigenschaften aller Elemente eines p-adischen Kongruenzkörpers

(145) $\qquad K(x,p) = K(x, \bmod f(x,p))$

zurückgeführt, zu der ich jetzt übergehe.

47. Die p-adischen Kongruenzkörper und die ihnen isomorphen Körper $K(\mathfrak{P})$ der π-adischen algebraischen Zahlen.[78]) Es sei λ der Grad des unzerlegbaren Moduls $f(x,p)$ in (145), es sei also $K(x,p)$ vom λ^{ten} Grade. Ist dann $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda)$, etwa $(1, x, \ldots x^{\lambda-1})$, irgendeine Basis für $f(x,p)$, so lehrt das in der Anm. 5 auseinandergesetzte Verfahren, daß jedes Element v des Körpers einer Gleichung λ^{ten} Grades:

(146) $\quad g(t) = (-1)^\lambda \,|\, b_{ik} - \delta_{ik} t \,| = t^\lambda - b_1 t^{\lambda-1} + \cdots + (-1)^\lambda b_\lambda = n(t-v)$

78) Vgl. Nr. 6 dieses Referates.

mit p-adischen Koeffizienten, der sog. *Hauptgleichung* genügt, deren linke Seite irreduzibel oder die Potenz einer irreduziblen Funktion $g_0(t)$ ist, je nachdem v ein primitives Element von $K(x, p)$ ist oder nicht.

Ich nenne nun das Element v *algebraisch ganz* oder *gebrochen*, je nachdem seine Hauptgleichung $g(t)$ ganze p-adische Koeffizienten hat oder nicht. Dann besteht der folgende Fundamentalsatz:

> Ein Element v des Körpers $K(x, p)$ ist algebraisch ganz oder gebrochen, je nachdem seine Norm $n(v) = b_\lambda$ eine ganze oder eine gebrochene p-adische Zahl ist.[79])

Durch diesen Satz wird die Untersuchung der ganzen Elemente von $K(x, p)$ und die Behandlung aller Fragen der Teilbarkeit in diesem Körper außerordentlich einfach und durchsichtig, denn man braucht nur die für die p-adischen Zahlen $n(v)$, $n(w)$, ... geltenden Definitionen und Sätze auf die zugehörigen Elemente v, w, ... zu übertragen. So ergibt sich unmittelbar, daß die Summe und das Produkt ganzer Elemente wieder ganz ist, daß also die ganzen Elemente von $K(x, p)$ einen Ring bilden. Von zwei Elementen v und w heißt das erste durch das zweite *teilbar*, wenn $\frac{v}{w}$ ganz, wenn also $n(v)$ durch $n(w)$ teilbar ist; sie heißen *äquivalent*, wenn außerdem auch $\frac{w}{v}$ ganz ist, wenn also $n(v)$ und $n(w)$ äquivalent sind, d. h. gleiche Ordnungszahl haben. Ein Element ε heißt eine *Einheit*, wenn $n(\varepsilon)$ eine p-adische Einheit ist. Alle Einheiten ε, ε', ... bilden eine Gruppe, da sie sich durch Multiplikation und Division wiedererzeugen. Äquivalente Elemente v und w unterscheiden sich also nur durch einen Einheitsfaktor.

Da die Norm jedes ganzen Elementes, welches keine Einheit ist, eine positive Ordnungszahl besitzt, so muß es mindestens ein solches π geben, für welches die Ordnungszahl von $n(\pi)$ positiv und möglichst klein ist. Jedes solche Element soll eine *Primzahl* im Körper $K(x, p)$ heißen und die Ordnungszahl f ihrer Norm $n(\pi) = \varepsilon p^f$ werde ihr *Grad* genannt. Der Körper $K(x, p)$ enthält unendlich viele solche Primzahlen π, π', ..., aber alle sind untereinander äquivalent; ist also π eine unter ihnen, so sind alle anderen und nur sie in der Form $\pi' = \varepsilon\pi$ enthalten. Allgemeiner ist jedes ganze oder gebrochene Element v eindeutig in der Form $v = \varepsilon\pi^a$ darstellbar, wo a eine bestimmte ganze Zahl bedeutet, welche dann und nur dann nicht negativ ist, wenn v algebraisch ganz ist. a heißt *die Ordnungszahl von* v.

79) Vgl. Nr. 5 dieses Referates und *H.* III, S. 438 ff.

Die Ordnungszahl eines Produktes (Quotienten) zweier Elemente v und w ist also die Summe (Differenz) der Ordnungszahlen seiner beiden Komponenten. Hat $v = \varepsilon\pi^a$ die Ordnungszahl a, so ist af diejenige ihrer Norm. Ist also speziell $p = \varepsilon\pi^e$, ist also e die Ordnungszahl der Primzahl p im Körper $K(x, p)$, so besitzt $n(p) = p^\lambda$ die Ordnungszahl ef, es ist also $\lambda = ef$. Die Zahl e soll im folgenden die *Ordnung der Primzahl* π genannt werden. Das Produkt ef der Ordnung und des Grades der Primzahl π ist also stets gleich dem Grade λ des Körpers $K(x, p)$. Ein Element v heißt durch π^ϱ teilbar, wenn $n(v)$ durch $n(\pi^\varrho) \sim p^{f\varrho}$ teilbar ist; also ist v dann und nur dann durch jede noch so hohe Potenz von π teilbar, wenn $n(v) = 0$ ist Dann ist aber die Hauptgleichung für v $g(t) = n(t - v) = t^\lambda$, d. h. es ist $v^\lambda = 0$ also $v = 0$. Ein Element $v = v_1 x_1 + \cdots + v_\lambda x_\lambda$ ist also dann und nur dann durch jede noch so hohe Potenz von π teilbar, wenn es Null ist, wenn also alle seine Koeffizienten v_i Null sind. Zwei Elemente v und v' sind mithin stets und nur dann für jede noch so hohe Potenz von π kongruent, wenn sie gleich sind.

Im Körper $K(x, p)$ verliert die reelle Zahl p ihren Primzahlcharakter stets und nur dann, wenn $e > 1$ ist, und an ihre Stelle tritt in jedem Falle die zugehörige Primzahl π oder jede ihr äquivalente, während p äquivalent der Primzahlpotenz π^e wird. Die Untersuchung der Teilbarkeitsbeziehungen der Elemente v des Kongruenzkörpers $K(x, p)$ wird also vollständig durch diejenige jener Elemente zu einer Primzahl π ersetzt, zu der ich jetzt übergehe.

Diese Untersuchung erfordert zunächst eine vollständige Übersicht über alle *ganzen* Elemente γ des Kongruenzkörpers $K(x, p)$. Man kann durch ein direktes endliches Verfahren stets eine solche Basis $(x_1, x_2, \ldots x_\lambda)$ von lauter ganzen Elementen finden, daß alle und nur die ganzen Elemente jenes Körpers in der Form $(c_1 x_1 + \cdots + c_\lambda x_\lambda)$ mit *ganzen* p-adischen Koeffizienten dargestellt sind; jedes solches System (x_i) heißt ein *Fundamentalsystem* für diesen Körper.

Alle diese ganzen Größen γ bilden nun modulo π betrachtet einen endlichen Kongruenzkörper $K(\gamma, \bmod \pi)$ vom Grade f; derselbe enthält also genau f modulo π unabhängige Elemente $(x_1, x_2, \ldots x_f)$, während zwischen je $f + 1$ Elemente $(x_0, x_1, \ldots x_f)$ eine lineare Kongruenz $c_0 x_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_f x_f \equiv 0 \pmod{\pi}$ besteht. Jedes System $(x_1, \ldots x_f)$ von f unabhängigen Elementen heißt auch hier ein *Fundamentalsystem* jenes Kongruenzkörpers. Man kann aus einem Fundamentalsystem $(x_1, \ldots x_\lambda)$ für alle ganzen Elemente von $K(x, p)$ stets f, etwa $(x_1, \ldots x_f)$ so auswählen, daß sie ein Fundamentalsystem für den Kongruenzkörper $K(\gamma, \pi)$ bilden. Dann bilden die $\sigma = p^f \sim n(\pi)$

Elemente $\varepsilon = c_1 x_1 + \cdots + c_f x_f \qquad (c_i = 0, 1 \ldots p-1)$

ein vollständiges Restsystem $(\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \ldots \varepsilon^{(\sigma-1)})$ modulo π.

Die Elemente v des Kongruenzkörpers $K(x, p)$ stimmen nun in ihrer Gesamtheit überein mit dem Körper $K(\mathfrak{P})$, der sog. *π-adischen Zahlen*, welcher folgendermaßen definiert ist: Jede Zahlgröße:

$$\alpha = \varepsilon_a \pi^a + \varepsilon_{a+1} \pi^{a+1} + \cdots, \tag{147}$$

deren Entwicklungszahl π eine beliebige Primzahl von $K(x, p)$ ist und deren Koeffizienten $\varepsilon_a, \varepsilon_{a+1}, \ldots$ ganze Elemente desselben Körpers sind, welche beliebig weit berechnet werden können, soll eine π-adische Zahl genannt werden; die Elemente von $K(p, x)$

$$\varepsilon_a \pi^a, \quad \varepsilon_a \pi^a + \varepsilon_{a+1} \pi^{a+1}, \quad \ldots \tag{147a}$$

heißen ihre Näherungswerte. Zwei π-adische Zahlen α und α' sind *kongruent modulo* π^ϱ oder *modulo* $\mathfrak{P}^\varrho$, wenn *fast alle* ihre Näherungswerte modulo π^ϱ kongruent sind; sie sind *gleich für den Bereich von* $\mathfrak{P}$, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{P}$ kongruent sind. Wird die Entwicklungszahl π fest gewählt, und werden die Koeffizienten ε_k auf ein und dasselbe Restsystem modulo π beschränkt, so heißt die Reihe (147) die *reduzierte Darstellung von* α, und jede π-adische Zahl ist einer einzigen reduzierten gleich. Bei dieser Definition der Gleichheit und der gewöhnlichen Festsetzung über die Addition und die Multiplikation π-adischer Zahlen bilden diese einen Zahlkörper $K(\mathfrak{P})$, welcher dem in (12) eingeführten Körper $\overline{K}(\mathfrak{P})$ aller konvergenten und nicht konvergenten Potenzreihen für den Punkt $\mathfrak{P}$ der *Riemann*schen Fläche völlig entspricht.

Man beweist nun direkt, daß jedes Element v des Kongruenzkörpers $K(x, p)$ einer einzigen π-adischen Zahl γ gleich ist, welche *ihre π-adische Entwicklung* genannt werde, und daß auch umgekehrt jede π-adische Zahl gleich einem Elemente von $K(x, p)$ ist. Also ist der zu untersuchende Kongruenzkörper $K(x, p)$ dem Körper $K(\mathfrak{P})$ der π-adischen Zahlen einstufig isomorph; der letztere kann daher jetzt an Stelle von $K(x, p)$ weiter untersucht werden.

Der Körper $K(\mathfrak{P})$ der π-adischen Zahlen ist ein algebraischer Erweiterungskörper vom $ef = \lambda^{\text{ten}}$ Grade über dem Körper $K(p)$ der p-adischen Zahlen. In ihm sind alle $(p^f - 1)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln w^ν $(\nu = 0, 1 \ldots p^f - 2)$ enthalten, wo w eine solche primitive π-adische Einheitswurzel bedeutet. Außer diesen kann $K(\mathfrak{P})$ höchstens noch $p^{\varrho\,\text{te}}$ Einheitswurzeln enthalten, deren Wurzelexponent eine Potenz von p ist. Die $\sigma = p^f$ Zahlen $(0, 1, w, \ldots w^{p^f-2})$ bilden ein vollständiges Restsystem modulo $\mathfrak{P}$; deshalb heißt der durch w bestimmte Körper

$K(w)$ der zu $K(\mathfrak{P})$ gehörige *Koeffizientenkörper*. Derselbe ist ein algebraischer Körper f^{ten} Grades über $K(p)$, während $K(\mathfrak{P})$ ein Körper e^{ten} Grades über $K(w)$ ist.

Im Körper $K(w)$ ist die Primzahl π ein primitives Element. Ist e nicht durch p teilbar, so kann π stets so ausgewählt werden, daß es in $K(w)$ einer einfachsten *reinen* Gleichung e^{ten} Grades

$$\pi^e - w^\vartheta p = 0 \tag{148}$$

genügt, daß also die Entwicklungszahl der π-adischen Zahlen abgesehen von einer Einheitswurzel die e^{te} Wurzel aus p ist.[80])

Die π-adischen Zahlen unterscheiden sich also nur dadurch von den p-adischen Zahlen, daß ihre Reihen nicht nach ganzen, sondern im allgemeinen nach gebrochenen Potenzen $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ von p fortschreiten, und daß ihre Koeffizienten nicht $(p-1)^{\text{te}}$, sondern $(p^f-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzeln sind. Ihrer Natur und ihrem arithmetischen Verhalten nach stimmen beide Zahlkörper genau überein.

48. Der zu einer vorgelegten Gleichung $F(x) = 0$ zugehörige Galoissche π-adische Zahlkörper.[81]) Die bisher gefundenen Ergebnisse können jetzt zur Bildung eines solchen Erweiterungskörpers $K(\mathfrak{P})$ von π-adischen Zahlen benutzt werden, daß in ihm die linke Seite $f(x)$ der vorgelegten Gleichung vollständig, d. h. in ein Produkt $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$ von n Linearfaktoren zerfällt.

Zerlegen wir nämlich die Funktion $f(x)$ wie in (142) im Körper $K(p)$ in das eindeutig bestimmte Produkt von ν verschiedenen p-adischen Primfaktoren:

$$f(x) = f_1(x,p)\cdots f_\nu(x,p), \qquad (p) \tag{149}$$

und sind diese schon alle vom ersten Grade, ist also $\nu = n$, so ist die gestellte Aufgabe bereits durch den Körper $K(p)$ gelöst. Ist dagegen $\nu < n$, so sei etwa der Grad λ_1 von $f_1(x,p)$ größer als Eins. Dann sei der zugehörige Kongruenzkörper des λ_1^{ten} Grades $K_p(x, \bmod f_1(x,p))$ gleich dem algebraischen π_1-adischen Körper $K(\mathfrak{P}_1)$ vom λ_1^{ten} Grade, dessen Primzahl π_1 die Ordnung e_1 und den Grad f_1 haben möge, so daß $e_1 f_1 = \lambda_1$ ist. Zerlegt man nun die Grundfunktion $f(x)$ in dem Oberkörper $K(\mathfrak{P}_1)$ von $K(p)$ weiter in ihre Primfaktoren, so erhält man eine neue Zerlegung:

$$f(x) = f_1^{(1)}(x,\pi_1)\cdots f_{\nu_1}^{(1)}(x,\pi_1), \qquad (\mathfrak{P}) \tag{149a}$$

welche darin besteht, daß sich jeder der p-adischen Faktoren $f_i(x,p)$ jetzt noch weiter, und zwar wieder in lauter verschiedene π_1-adische

80) Vgl. p. 547 (13) und (13a) dieses Referates.

81) Vgl. Nr. 7 dieses Referates und *H.* III, p. 446 ff.

Faktoren spaltet. Die Anzahl ν_1 aller dieser Faktoren ist sicher größer als ν, da von jenen ν ersten Primfaktoren jedenfalls der erste $f_1(x,p) = (x - x_1)\bar{f}_1(x,\pi_1)$ sich mindestens in zwei π_1-adische Faktoren zerlegen läßt. Ist jetzt $\nu_1 = n$, so zerfällt $f(x)$ innerhalb $K(\mathfrak{P}_1)$ vollständig in Linearfaktoren, und die Aufgabe ist gelöst.

Es sei jetzt auch $\nu_1 < n$, und $f^{(1)}(x,\pi_1)$ sei irgendeiner dieser ν_1 irreduziblen π_1-adischen Faktoren $f_i^{(1)}(x,\pi_1)$, dessen Grad λ_2 größer als 1 ist; dann ist der zugehörige Kongruenzkörper $K_{\pi_1}(x, \mathrm{mod}\, f^{(1)}(x,\pi_1)) = K(x,\pi_1)$ aller modulo $f^{(1)}(x,\pi_1)$ ganzen Funktionen von x mit π_1-adischen Koeffizienten ebenfalls vom λ_2^{ten} Grade, und man zeigt nun genau ebenso wie vorher, daß derselbe gleich einem Körper $K(\mathfrak{P}_2)$ von π_2-adischen Zahlen vom Grade λ_2 über $K(\mathfrak{P}_1)$ ist; ist also e_2 die Ordnung, f_2 der Grad einer Primzahl π_2 innerhalb dieses Körpers, so ist $e_2 f_2 = \lambda_2$. In bezug auf den Körper $K(p)$ ist $K(\mathfrak{P}_2)$ ein algebraischer Erweiterungskörper vom Grade $\lambda_1\lambda_2$, und für ihn sind $e_1 e_2$ und $f_1 f_2$ Ordnung und Grad der Primzahl π_2.

In diesem größeren Erweiterungskörper $K(\mathfrak{P}_2)$ zerfällt die Funktion $f(x)$ noch weiter, da sich jetzt von dem vorher irreduziblen Faktor $f^{(1)}(x,\pi_1)$ noch mindestens ein Linearfaktor $(x - \alpha_2)$ abspaltet. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich also nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein π-adischer Zahlkörper $K(\mathfrak{P})$ der Art, daß in ihm $f(x)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, daß also in ihm die Gleichung $f(x) = 0$ genau n eindeutig bestimmte π-adische Wurzeln hat.

Für jede Primzahl p erhält man so einen *Galois*schen Körper π-adischer Zahlen $K(\mathfrak{P})$, innerhalb dessen die *Galois*sche Theorie gilt und hier vollständigen Aufschluß über die arithmetischen Eigenschaften aller algebraischen Zahlen liefert. Es ergibt sich endlich der Satz, daß jede Gleichung $F(x) = 0$ in jedem p-adischen Zahlkörper $K(p)$ *algebraisch* auflösbar ist.[82])

82) *H.* III, p. 451—452.

(Abgeschlossen im März 1921.)

II C 6. ARITHMETISCHE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN ZWEIER UNABHÄNGIGEN VERÄNDERLICHEN.

Von

HEINRICH W. E. JUNG

IN HALLE A. D. SAALE.

Inhaltsübersicht.

I. Einleitung.

II. Der Körper der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen.

1. Die Darstellung der Funktionen des Körpers in der Umgebung einer Kurve.
2. Die Darstellung der Funktionen des Körpers in der Umgebung einer Stelle.
3. Die Stellen des Körpers.

III. Primteiler und Divisoren.

4. Die Primteiler erster Stufe.
5. Einteilung der Primteiler erster Stufe in zwei Arten.
6. Die Primteiler zweiter Stufe.
7. Divisoren, Divisorenklassen.
8. Grad und Geschlecht einer Klasse.
9. Birationale Transformation.
10. Fundamentalsysteme für die Vielfachen eines Divisors.

IV. Die Zeuthen-Segresche Invariante und das numerische Geschlecht.

11. Die Fläche F.
12. Die *Zeuthen-Segre*sche Invariante.
13. Das numerische oder arithmetische Geschlecht.

Literatur.

Beppo Levi, Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche, Ann. di Mat. (2) 26 (1897), p. 219—253.

—, Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche, Torino Atti 33 (1897), p. 66—86.

—, Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche, Ann. di Mat. (3) 2 (1899), p. 127—138.

Beppo Levi, Sulla trasformazione dell' intorno di un punto per una corrispondenza birazionale fra due spazi, Torino Atti 35 (1900), p. 20—33.
—, Sur la résolution des points singuliers des surfaces algébriques, Paris C. R. 134 (1902), p. 222—225.
—, Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables, Paris C. R. 134 (1902), p. 642—644.
G. H. Halphen, Sur les lignes singulières des surfaces algébriques, Ann. di Mat. (2) 9 (1878), p. 68—105.
Kurt Hensel, Über die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen, Jahresber. d. D. Math.-Ver. 7 (1899), p. 58—61 = *Hensel* A.
—, Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen, Jahresber. d. D. Math.-Ver. 8 (1900), p. 221—331 = *Hensel* B.
—, Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen, Acta Math. 23 (1900), p. 339—416 = *Hensel* C.
Hensel A und B sind kurze Referate.
C. W. M. Black, The parametric representation of the neighborhood of a singular point of an analytic surface, Proc. of Am. Ac. 37 (1902), p. 281—330 = *Black*.
G. Landsberg, Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher, Berl. Ber. 1 (1900), p. 296—302 = *Landsberg*.
H. W. E. Jung, Primteiler algebraischer Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen und ihr Verhalten bei birationalen Transformationen, Pal. Rend. 26 (1908), p. 113—127 = *Jung* A.
—, Der *Riemann-Roch*sche Satz für algebraische Funktionen zweier Veränderlichen, Jahresber. d. D. Math.-Ver. 18 (1909), p. 267—339, und Berichtigung dazu, ebenda 19 (1910), p. 172—176 = *Jung* B.
—, Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängiger Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$, J. f. Math. 133, p. 289 - 314 = *Jung* C.
—, Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche, J. f. Math. 138 (1910), p. 77—95 = *Jung* D.
—, Über die *Zeuthen-Segre*sche Invariante, Pal. Rend. 34 (1912), p. 225—277 = *Jung* E.
—, Über die ausgezeichneten Kurven algebraischer Flächen, J. f. Math. 142 (1912), p. 61—117 = *Jung* F.
—, Über die kanonische Klasse einer auf einer algebraischen Fläche liegenden algebraischen Kurve, *Schwarz*-Festschrift 1914, p. 166—167 = *Jung* G.
—, Über algebraische Flächen, J. f. Math. 150 (1919), p. 47—78 = *Jung* H.
—, Über die Differentialinvarianten algebraischer Flächen, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 182—221 = *Jung* J.
G. Castelnuovo und *F. Enriques*, Art. III C 6b in dieser Encyklopädie = *E.*

I. Einleitung.

Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen ist noch nicht so weit ausgebaut wie die entsprechende Theorie bei den Funktionen einer Veränderlichen. Vor allem fehlen eingehendere Untersuchungen über die Integrale. Die folgende Über-

sicht enthält im wesentlichen nur die Auseinandersetzung der Methoden und der Grundbegriffe. Im übrigen sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

II. Der Körper der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen.

1. Die Darstellung der Funktionen des Körpers in der Umgebung einer Kurve. Der Körper besteht aus allen rationalen Funktionen dreier Größen x, y, z, zwischen denen eine irreduktible algebraische Gleichung

$$G(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

besteht. Er heiße $K(x, y, z)$. Deuten wir x, y, z als kartesische Koordinaten, so wird durch (1) eine algebraische Fläche G definiert. Es sei $A(x, y)$ ein irreduktibles Polynom, also $A = 0$ die Gleichung einer Kurve A in der xy-Ebene. Für die Darstellung der Funktionen des Körpers $K(x, y, z)$ in der Umgebung von A, d. h. für solche Werte von x, y, für die $|A(x, y)|$ hinlänglich klein ist, hat *Hensel* folgendes bewiesen.[1])

Wir nehmen an, daß $A(x, y)$ von y wirklich abhängt. Sollte das nicht der Fall sein, so wäre im folgenden x mit y zu vertauschen. Ist y_0 eine Wurzel von $A(x, y) = 0$, so läßt sich z und damit jede Funktion R des Körpers K nach steigenden Potenzen von $y - y_0$ entwickeln mit Koeffizienten, die algebraische Funktionen von x sind. Statt nach Potenzen von $y - y_0$ kann man auch nach solchen von A entwickeln, was aus den *Hensel*schen Ergebnissen sofort folgt, da man $y - y_0$ nach Potenzen von $A(x, y)$ entwickeln kann, wobei die Koeffizienten algebraische Funktionen von x werden.

Über die Entwicklungen gilt folgendes[2]):

a) Es kann höchstens eine endliche Zahl von negativen Potenzen von $y - y_0$ vorkommen.

b) Im allgemeinen schreitet die Entwicklung nach ganzen Potenzen von $y - y_0$ fort. Nur für eine endliche Zahl von Kurven $A(x, y) = 0$ gibt es Entwicklungen, die nach ganzen Potenzen einer gebrochenen Potenz von $y - y_0$ fortschreiten.

c) Die Koeffizienten sind sämtlich Funktionen eines bestimmten algebraischen Körpers der einen Veränderlichen x, der entweder der durch $A(x, y) = 0$ definierte Körper oder ein Körper über diesem ist.

1) *Hensel* A, B, C.

2) *Hensel* C. Diese Entwicklungen finden sich schon bei *Halphen* am oben angegebenen Orte.

d) Die Entwicklung von z schreite nach ganzen Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{\alpha}}$ fort. Der Körper der Koeffizienten sei vom Relativgrade σ in bezug auf den durch $A(x, y) = 0$ definierten Körper. Man erhält dann aus der Entwicklung im ganzen $\alpha\sigma$ konjugierte, indem man die α-te Wurzel aus $y - y_0$ durch ihre anderen Werte ersetzt und die Koeffizienten durch die $\sigma - 1$ ihnen relativ zum Körper $A = 0$ konjugierten Funktionen. Diese $\alpha\sigma$ Entwicklungen sind nicht notwendig voneinander verschieden. Es gibt aber immer eine algebraische Funktion e von x folgender Art. Setzt man $e^{\alpha}(y - y_0) = \eta$ und schreibt die Entwicklung von z als Potenzreihe von η, so werden die Koeffizienten Funktionen eines Relativkörpers über dem Körper $A = 0$ von einem Relativgrade τ derart, daß die $\alpha\tau$ konjugierten Entwicklungen voneinander verschieden sind. Es heißt τ die Koeffizientenordnung.

e) Es sei der Grad der Gleichung (1) in z gleich n. Ist $n = \tau\alpha$, so gibt es nur die eine Entwicklung für z mit ihren konjugierten für die Umgebung der Kurve A. Ist $n < \tau\alpha$, so gibt es mindestens noch eine weitere Entwicklung, jedenfalls aber nur eine endliche Zahl. Jede dieser Entwicklungen stellt z in der Umgebung einer auf der Fläche G liegenden Kurve dar, deren Projektion auf die xy-Ebene die Kurve A ist. Schreitet die zugehörige Entwicklung nach ganzen Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{\alpha}}$ fort, so heißt die auf G liegende Kurve eine Verzweigungskurve in bezug auf x, y von der Verzweigungsordnung $\alpha - 1$.

f) Es sei (a, b) ein auf der Kurve A liegender Punkt, und es sei y_0 in der Umgebung von (a, b) eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$. Dann kann es sein — und nur für eine endliche Zahl von Punkten (a, b) ist es nicht so —, daß sich die Reihen für z verwandeln lassen in gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$, $y - b$. Ist

$$z = \mathfrak{P}(x - a, y - b) \tag{2}$$

eine solche Reihe, und ist $\mathfrak{P}(0, 0) = c$, so gibt uns (2) die Umgebung des Punktes (a, b, c) der Fläche G. Es ist jedoch i. a. nicht für alle Punkte von G möglich, aus den *Hensel*schen Reihenentwicklungen Darstellungen zu gewinnen, die uns die ganze Umgebung des betreffenden Punktes liefern. Die Untersuchungen von *Hensel* bedürfen daher einer Ergänzung.

2. Die Darstellung der Funktionen des Körpers in der Umgebung einer Stelle. a) Es sei P ein Punkt der Fläche G. Er habe die Koordinaten a, b, c. Dann kann man die Gleichung

$$G(x, y, z) = 0$$

für die Umgebung von P in der Form auflösen, daß man hat

$$x - a = \mathfrak{P}_1(u, v), \quad y - b = \mathfrak{P}_2(u, v), \quad z - c = \mathfrak{P}_3(u, v),$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ gewöhnliche Potenzreihen von zwei Parametern u, v sind, die für $u = v = 0$ verschwinden. Eine endliche Zahl derartiger Darstellungen genügt, um alle Stellen von G in einer genügend klein gewählten Umgebung von P zu erhalten. Dieser Satz ist bewiesen von *B. Levi*[3]) und *C. W. M. Black*[4]).

Der Beweis von *Black* läßt sich leicht so umformen, daß zugleich folgt, daß die Hilfsgrößen u, v als Funktionen des Körpers $K(x, y, z)$ gewählt werden können. *Black* selbst legt darauf keinen Wert, da er sich nicht auf algebraische Funktionen beschränkt. Man braucht nur die Gleichung (β) in § 2, S. 304 in der *Black*schen Arbeit in der Form anzunehmen

$$\varphi(x, y) = p(x, y)^m E(x, y).$$

Darin ist E eine Einheit für $x = y = 0$, und $p(x, y)$ ist eine ganze rationale Funktion von x, y, die für $x = y = 0$ verschwindet, in der aber die Glieder erster Dimension vorkommen. Man hat dann zu setzen

$$p(x, y) = x_1,$$

woraus sich x als gewöhnliche Potenzreihe von x_1 und y ergibt

$$x = \mathfrak{P}(x_1, y).$$

Diese Substitution ist statt der Gleichung (δ) von *Black* zu verwenden. Alles andere bleibt ungeändert.

b) Es sei P ein Punkt der xy-Ebene mit den Koordinaten a, b. Dann kann man die Gleichung

$$G(x, y, z) = 0$$

in der Form auflösen, daß man hat

$$x - a = \mathfrak{P}_1(u, v), \quad y - b = \mathfrak{P}_2(u, v),$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche, für $u = v = 0$ verschwindende Potenzreihen von u, v sind, während z entweder auch eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v wird oder der Quotient zweier solchen. Es genügt eine endliche Anzahl solcher Darstellungen, um alle Werte von z für eine hinlänglich klein gewählte Umgebung von P zu erhalten. Dieser Satz ist von *H. W. E. Jung*[5]) bewiesen. Er ist in dem unter a) angegebenen enthalten. Man kann daher auch hier u und v als

3) *Levi* A—F.

4) *Black*.

5) *Jung* C. Während *Levi* und *Black* die Singularitäten der Fläche G mit Hilfe von Transformationen von x, y, z auflösen, benutzt *Jung* nur Transformationen der unabhängigen Veränderlichen x, y.

Funktionen des Körpers wählen, was in der Arbeit von *Jung nicht* bewiesen ist, obwohl das in der Einleitung gesagt ist. Das kommt daher, daß der Schluß der Arbeit während des Druckes geändert ist.

3. **Die Stellen des Körpers $K(x, y, z)$.** Mit Benutzung einer Darstellung von x, y, z in der Nr. 2 angegebenen Form mit Hilfe zweier Parameter u, v lassen sich alle Funktionen des Körpers $K(x, y, z)$ darstellen als gewöhnliche Potenzreihen von u, v oder als Quotienten solcher. Die Gesamtheit dieser Darstellungen definiert eine *Stelle* des Körpers mit ihrer Umgebung. An der Stelle selbst kann eine Funktion aus $K(x, y, z)$ unbestimmt sein, wie z. B. die Funktion $\frac{u}{v}$ an der Stelle $u = v = 0$. *Die Stellen des Körpers $K(x, y, z)$ sind, im Unterschiede zu den Stellen eines algebraischen Körpers einer Veränderlichen, nicht vollständig bestimmt.* Zunächst kann man irgend r ($\geqq 2$) Funktionen des Körpers auswählen, von denen zwei voneinander unabhängig sein müssen, und festsetzen, daß an jeder Stelle diese Funktionen oder ihre reziproken Werte gewöhnliche Potenzreihen der Hilfsgrößen u, v werden, so daß die ausgewählten Funktionen an keiner Stelle unbestimmt sind.[6]) Betrachtet man einen algebraischen *Körper* und nicht eine algebraische *Fläche*, so wird man zweckmäßig *zwei* voneinander unabhängige Funktionen auszeichnen und diese dann als unabhängige Veränderliche betrachten, da es sich um einen Körper von *zwei* unabhängigen Veränderlichen handelt. Betrachtet man aber die algebraische *Fläche* $G(x, y, z) = 0$, so wird man die drei Größen x, y, z auszeichnen und die Stellen des Körpers so definieren, daß x, y, z an keiner Stelle unbestimmt werden. Dann nämlich entspricht jeder Stelle des Körpers ein ganz bestimmter Punkt der Fläche. Man kann dann aber auch noch einen Schritt weiter gehen. Sind x', y', z' die Ebenenkoordinaten einer Berührungsebene von G, so kann man die Stellen des Körpers auch so definieren, daß außer x, y, z auch x', y', z' an keiner Stelle unbestimmt werden, so daß jeder Stelle des Körpers sowohl ein bestimmter Punkt wie auch eine bestimmte Berührungsebene entspricht.

Daß die Stellen ganz verschieden sind, je nachdem, welche Größen man bei ihrer Definition auszeichnet, zeigt schon folgendes einfache Beispiel. Es sei der Körper definiert durch

$$G \equiv yz - x^2 = 0.$$

Nehmen wir x, y als unabhängige Veränderliche, so können wir für die Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ setzen

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{u^2}{v}. \tag{3}$$

6) *Jung* H, Kap. I, § 4.

Nehmen wir dagegen y, z als unabhängige Veränderliche, so können wir für die Umgebung von $y = 0, z = 0$ setzen

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\text{I. } x = uv, \quad y = v, \quad z = u^2 v; \\ &\text{II. } x = uv, \quad y = u^2 v, \quad z = v. \end{aligned}$$

Man kann I benutzen etwa für $\left|\frac{y}{z}\right| > 1$, $|z| < 1$ und II für $\left|\frac{y}{z}\right| \leqq 1$, $|z| < 1$. Sowohl die Darstellung (3) wie auch (4) geben uns unter anderem die ganze Umgebung des Punktes $x = y = z = 0$. In (3) wird z für $u = v = 0$ unbestimmt, während in (4) z immer bestimmt ist, so daß die durch (3) und (4) definierten Stellen wesentlich verschieden sind.

Aber selbst, wenn wir einige Funktionen des Körpers ausgewählt haben und die Stellen so definieren, daß diese Funktionen überall bestimmte Werte haben, ist diese Definition nicht eindeutig. Es sei z. B. der Körper $K(x, y, z)$ der Körper der rationalen Funktionen von x, y. Die Umgebung des Punktes x, y können wir darstellen durch die Gleichungen

$$x = u, \quad y = v.$$

Wir können sie aber auch darstellen durch die beiden Gleichungspaare

$$\begin{aligned} &\text{I. } x = uv, \quad y = v; \\ &\text{II. } x = v, \quad y = uv, \end{aligned}$$

indem wir I etwa gelten lassen für $\left|\frac{y}{x}\right| > 1$, $|x| < 1$ und II für $\left|\frac{y}{x}\right| \leqq 1$, $|x| < 1$. Im ersten Falle haben wir nur eine Stelle im Punkte $x = y = 0$, im zweiten unendlich viele. Denn jeder Stelle $u = u_1$, $v = 0$ des Körpers entspricht die Stelle $x = y = 0$, wenn u_1 irgendeine endliche Zahl ist.

Diese Willkürlichkeit in der Definition der Stellen hat ihre Nachteile, aber auch ihre Vorteile. Hat man z. B. auf der Fläche G eine Kurve mit irgendwelchen mehrfachen Punkten, so kann man *allein durch andere Definition der Stellen* die Kurve verwandeln in eine Kurve ohne mehrfache Stellen, wovon auch die italienischen Mathematiker häufig Gebrauch machen. Es kommt das daher, daß eine Veränderung in der Definition der Stellen nichts anderes ist als eine birationale Transformation. Und wenn man bedenkt, daß bei einer solchen Transformation Punkte der Fläche G in Kurven und Kurven in Punkte übergehen können, so sieht man, daß die Willkürlichkeit in der Definition der Stellen in der Natur der Sache liegt.

III. Primteiler und Divisoren.

4. Die Primteiler erster Stufe.[7]) Es sei $\mathfrak{P}$ ein algebraischer Körper einer Veränderlichen, der zum Körper $K(x, y, z)$ in folgender Beziehung steht. Jeder Funktion aus $K(x, y, z)$ entspreche eine und nur eine Funktion aus $\mathfrak{P}$. Jede Gleichung, die zwischen Funktionen aus $K(x, y, z)$ besteht, bestehe auch zwischen den ihnen entsprechenden Funktionen aus $\mathfrak{P}$. Es heißt dann $\mathfrak{P}$ ein *Primteiler erster Stufe von* $K(x, y, z)$. Den Übergang von $K(x, y, z)$ zu $\mathfrak{P}$ drückt man so aus, daß man sagt, man setzt $\mathfrak{P} = 0$. Ist R eine Funktion aus $K(x, y, z)$, der im Körper $\mathfrak{P}$ die Zahl 0 entspricht, die also für $\mathfrak{P} = 0$ identisch null wird, so sagt man R ist durch $\mathfrak{P}$ teilbar, oder $\mathfrak{P}$ ist in R enthalten. Sind die Funktionen R und S beide durch $\mathfrak{P}$ teilbar, und wird der Quotient $R : S$ für $\mathfrak{P} = 0$ weder identisch null noch unendlich, so sagt man, R und S werden für $\mathfrak{P} = 0$ von derselben Ordnung null, oder sie enthalten $\mathfrak{P}$ in derselben Potenz. Wird aber $R : S$ für $\mathfrak{P} = 0$ zu null, so sagt man, R enthält $\mathfrak{P}$ in höherer Potenz als S. Nun gibt es immer eine durch $\mathfrak{P}$ teilbare Funktion T aus $K(x, y, z)$ von der Art, daß keine Funktion aus $K(x, y, z)$ $\mathfrak{P}$ in niedrigerer Potenz enthält als T.

Ist dann R irgendeine Funktion des Körpers, die für $\mathfrak{P} = 0$ zu null wird, die also durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist, so muß unter den Funktionen $R : T$, $R : T^2$, $R : T^3$, ... eine vorkommen, die für $\mathfrak{P} = 0$ weder null noch unendlich wird. Denn erstens muß $R : T^l$ für genügend großes ganzzahliges l für $\mathfrak{P} = 0$ gleich unendlich werden. Ist zweitens $R : T^{\lambda+1}$ die *erste* Funktion der Reihe, die für $\mathfrak{P} = 0$ unendlich wird, und ist $R : T^\lambda$ für $\mathfrak{P} = 0$ null, so würde $R : T^\lambda$ eine Funktion des Körpers sein, die für $\mathfrak{P} = 0$ von geringerer Ordnung null wird als T. Es wird also $R : T^\lambda$ für $\mathfrak{P} = 0$ weder identisch null noch unendlich. Wir sagen: R ist durch $\mathfrak{P}^\lambda$ teilbar oder $\mathfrak{P}$ ist in R in der λ-ten Potenz enthalten. Wenn R für $\mathfrak{P} = 0$ unendlich wird und $R \cdot T^\lambda$ für $\mathfrak{P} = 0$ weder null noch unendlich, so sagen wir, R ist durch $\mathfrak{P}^{-\lambda}$ teilbar, oder R enthält $\mathfrak{P}$ in der Potenz $-\lambda$.

Es entspricht z. B. jeder *Hensel*schen Entwicklung von z nach Potenzen eines irreduktiblen Polynoms $A(x, y)$ ein Primteiler erster Stufe. Ist nämlich etwa

$$z = a_0 + a_1 A^{\frac{1}{\alpha}} + a_2 A^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots \tag{5}$$

eine solche Entwicklung, wo die Koeffizienten a_i algebraische Funktionen von x sind, so können wir mit Hilfe dieser Entwicklung jede

7) *Jung* A, *Jung* F, Nr. 1.

Funktion des Körpers $K(x, y, z)$ in eine nach steigenden Potenzen von $A^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitende Potenzreihe entwickeln, deren Koeffizienten algebraische Funktionen von x sind. Setzen wir in diesen Entwicklungen $A = 0$, so gehen die Funktionen des Körpers K über in algebraische Funktionen von x, und zwar in Funktionen des zur Reihe (5) gehörenden Koeffizientenkörpers. Wir erhalten so aus K einen zur Entwicklung (5) gehörenden Primteiler $\mathfrak{P}$ erster Stufe. Eine Funktion R aus K ist dann durch $\mathfrak{P}^\lambda$ teilbar, wenn ihre Entwicklung nach steigenden Potenzen von A mit der λ-ten Potenz von $A^{\frac{1}{\alpha}}$ beginnt. Man kann *jeden* Primteiler $\mathfrak{P}$ erster Stufe auf diese Art definieren, *wenn man nur die unabhängigen Veränderlichen passend wählt.* Sie müssen so angenommen werden, daß sie nicht beide für $\mathfrak{P} = 0$ konstant werden.

5. Die Einteilung der Primteiler erster Stufe in zwei Arten.[8]) Es gilt der Satz: *Jede Funktion des Körpers $K(x, y, z)$ enthält unendlich viele Primteiler erster Stufe.*

Nehmen wir z. B. den Körper $K(x, y)$ der rationalen Funktionen von x, y. Es sei a irgendeine ganze positive Zahl. Wir setzen in die rationalen Funktionen von x, y statt y ein $x^a\xi$, entwickeln nach steigenden Potenzen von x und lassen dann x zu null werden. Es gehen auf diese Art die rationalen Funktionen von x, y über in rationale Funktionen von ξ. Wir erhalten so einen algebraischen Körper der einen Veränderlichen ξ, der ein Primteiler erster Stufe des Körpers $K(x, y)$ nach der in Nr. 4 angegebenen Definition ist. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{P}_a$. Wir erhalten so unendlich viele Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ Durch alle diese Primteiler ist y teilbar, und zwar enthält y $\mathfrak{P}_\alpha$ genau in der αten Potenz.

Die hierdurch entstehende Schwierigkeit ist von ganz anderer Art als in der Theorie der algebraischen Zahlen. Dort besteht die Schwierigkeit darin, die Primteiler so zu definieren, daß eine eindeutige Zerlegbarkeit der Zahlen in Primteiler gewährleistet ist. Hier lassen sich die Primteiler, wie in Nr. 4 angegeben, einfach definieren, und es ist auch für jeden Primteiler zu definieren, wie oft er in einer Funktion enthalten ist. Die Schwierigkeit ist hier praktischer Art. Jede Funktion enthält unendlich viele Primteiler, die man bei der Zerlegung der Funktion nicht alle explizit angeben kann. Da tritt der glückliche Umstand ein, daß man die Primteiler in zwei Arten teilen kann in der Weise, daß jede Funktion nur eine endliche Zahl von Primteilern der einen Art enthält und eindeutig in Primteiler dieser Art

8) *Jung* A, § 2, *Jung* F, Nr. 2.

zerlegt werden kann, und daß weiter die Primteiler der anderen Art, die in der Funktion enthalten sind, durch die der einen mitbestimmt sind.

a) *Die Primteiler erster Art.* Es liegt nahe, die Primteiler erster Art geometrisch zu definieren. Definiert $G(x, y, z) = 0$ den Körper $K(x, y, z)$, so kann man $G = 0$ als Gleichung einer algebraischen Fläche auffassen, indem man x, y, z als kartesische Punktkoordinaten deutet. Man kann dann einen Primteiler $\mathfrak{P}$ von der ersten Art nennen, wenn ihm auf G eine *Kurve* entspricht, wenn also für $\mathfrak{P} = 0$ die drei Größen x, y, z nicht alle drei konstant werden. Oder, wenn man nur zwei Größen, etwa x, y, auszeichnen will, die man dann als unabhängige Veränderliche auffassen kann, so kann man $\mathfrak{P}$ einen Primteiler erster Art nennen, wenn für $\mathfrak{P} = 0$ nicht x und y beide konstant werden, wenn also $\mathfrak{P}$ auf G eine Kurve entspricht, deren Projektion auf die xy-Ebene kein Punkt ist. Aber es zeigt sich, daß eine derartige Definition nicht das Wesen der Sache trifft, wie folgendes Beispiel zeigt. Beschränkt man sich auf diese Primteiler, die also, gleich null gesetzt, x und y nicht beide konstant werden lassen, so kann ein Doppeldifferential unendlich werden, ohne daß es längs eines Primteilers unendlich wird. Man hat also kein übersichtliches Kriterium dafür, daß ein Doppeldifferential von der ersten Gattung ist. Z. B. wird das Doppeldifferential

$$\frac{dxdy}{z} = \frac{dxdy}{\sqrt{x^4 - y^4}}$$

für keinen Primteiler der angegebenen Art unendlich, wird aber trotzdem im Punkte $x = y = z = 0$ unendlich. Man hat nämlich — unter anderem — die Darstellung

$$x = u, \quad y = uv \quad z = u^2\sqrt{1 - v^4}, \tag{6}$$

woraus folgt

$$\frac{dxdy}{z} = \frac{dudv}{u\sqrt{1 - v^4}},$$

so daß das Differential für $u = 0$ unendlich wird, d. h. für $x = y = z = 0$. Nun wird durch $u = 0$ ein Primteiler definiert. Setzt man nämlich in alle rationalen Funktionen von x, y, z für x, y, z die Werte (6) ein, entwickelt nach steigenden Potenzen von u und setzt dann $u = 0$, so werden die Funktionen des Körpers $K(x, y, z)$ rationale Funktionen von v und $\sqrt{1 - v^4}$, also Funktionen eines algebraischen Körpers einer Veränderlichen. Man wird den so definierten Primteiler mit zu den Primteilern erster Art rechnen wollen. So kommt man zu folgender Definition der Primteiler erster Art.

Zunächst sind die Stellen des Körpers zu definieren. Wir betrachten dann eine Funktion R des Körpers in der Umgebung einer

Stelle S, wo sie null wird. Sie habe unter Benutzung der zur Stelle S gehörenden Hilfsgrößen u, v die Darstellung

$$R = \frac{L(u,v)}{H(u,v)},$$

wo L und H gewöhnliche Potenzreihen von u, v sein sollen, und wo L für $u = v = 0$ verschwinden soll. Wir nehmen an, daß L und H in der Umgebung von $u = v = 0$ keinen gemeinsamen Faktor haben. Wir können L in Faktoren zerlegen, die gewöhnliche für $u = v = 0$ verschwindende Potenzreihen von u, v sind, und die sich nicht weiter in derselben Art zerlegen lassen. Das wird sofort klar, wenn man nach dem *Weierstraß*schen Vorbereitungssatze $L(u, v)$ darstellt in der Form

$$L(u, v) \equiv E(u, v)\, l(u, v),$$

wo E eine Einheit für die Stelle $u = v = 0$ ist, d. h. eine Potenzreihe von u, v, die für $u = v = 0$ nicht verschwindet, während l eine ganze rationale Funktion von v ist, in der der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 ist, während die anderen Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von u sind, die für $u = 0$ verschwinden. Ist $k(u, v)$ ein nicht weiter zerlegbarer Faktor von L, so wird durch $k = 0$ ein Primteiler $\mathfrak{P}$ erster Stufe definiert. Denn es wird für $k = 0$ auch $R = 0$, so daß zu der Gleichung $G(x, y, z) = 0$ noch eine algebraische Gleichung hinzukommt. Es kann sein, daß noch andere Faktoren von L denselben Primteiler $\mathfrak{P}$ definieren. Das Produkt aller $\mathfrak{P}$ definierenden Faktoren von L, jeden in der ersten Potenz genommen, nenne ich *die zugeordnete Funktion von* $\mathfrak{P}$ *für die Stelle* S und bezeichne es mit $\mathfrak{P}(u, v)$. Die zugeordnete Funktion soll nur bestimmt sein bis auf eine Einheit für die Stelle $u = v = 0$ als Faktor. Es kann also nach dem *Weierstraß*schen Vorbereitungssatz $\mathfrak{P}(u, v)$ auch immer als ganze rationale Funktion von v angenommen werden. Haben wir die Hilfsgrößen u, v als Funktionen des Körpers $K(x, y, z)$ gewählt, so besteht zwischen ihnen für $\mathfrak{P} = 0$ eine irreduktible rationale Gleichung $p(u, v) = 0$, und es kann dann $\mathfrak{P}(u, v)$ nichts anderes sein als der größte gemeinsame Teiler von $l(u, v)$ und $p(u, v)$.

Ist $\mathfrak{P}'$ ein in R in positiver Potenz enthaltener Primteiler, und definiert keiner der Faktoren von $L(u, v)$, gleich null gesetzt, den Primteiler $\mathfrak{P}'$, so setzen wir die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}'$ für die Stelle S gleich 1.

Nehmen wir ein einfaches Beispiel. Es sei die Fläche G definiert durch

$$G \equiv (z - x)^2 - y^2(1 + x) = 0.$$

Aus $G = 0$ folgt dann für die Umgebung von $x = y = 0$

$$z = x \pm y\sqrt{1 + x}.$$

Wir haben also im *Punkte* $x = y = z = 0$ zwei *Stellen* S_1 und S_2 von G, die definiert sind durch

$$S_1: \quad x = u, \quad y = v, \quad z = u + v\sqrt{1+u} = u + v + \tfrac{1}{2}uv - \tfrac{1}{8}u^2v + \cdots,$$

$$S_2: \quad x = u, \quad y = v, \quad z = u - v\sqrt{1+u} = u - v - \tfrac{1}{2}uv + \tfrac{1}{8}u^2v + \cdots.$$

Wir betrachten die Stelle S_1 und wählen $R = yz$. Es wird dann $H = 1$ und

$$L(u, v) = v(u + v\sqrt{1+u}) = v(u + v + \tfrac{1}{2}uv + \cdots).$$

Wir haben also $\quad l(u, v) = v\{v + u(1+u)^{-\frac{1}{2}}\}.$

Es hat hier l zwei Faktoren $k_1 = v$ und $k_2 = v + u(1+u)^{-\frac{1}{2}}$. Der durch $k_2 = 0$ definierte Primteiler heiße $\mathfrak{P}$. Für $\mathfrak{P} = 0$ wird $z = 0$, so daß wegen $G = 0$ zwischen $u = x$, $v = y$ für $\mathfrak{P} = 0$ die Gleichung besteht

$$p(u, v) \equiv v^2(1+u) - u^2 = 0.$$

Es ist hier k_2 der größte gemeinsame Teiler von p und l, also die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für die Stelle S_1. Durch $k_1 = 0$ wird ein von $\mathfrak{P}$ verschiedener Primteiler $\mathfrak{P}_1$ definiert Denn für $\mathfrak{P}_1 = 0$ wird y zu null, für $\mathfrak{P} = 0$ aber nicht.

Ein anderes Beispiel ist folgendes: Es sei $K(x, y, z)$ der Körper $K(x, y)$ der rationalen Funktionen von x, y. Wir betrachten die Stelle S, $x = y = 0$. Wir haben einfach zu setzen

$$x = u, \quad y = v.$$

Es sei $R = (y - x)(y^2 - x^2 - x^3)$, also in der Umgebung von S, $H = 1$ und $\quad L(u, v) \equiv (v - u)(v^2 - u^2 - u^3) = l(u, v).$

Hier hat l drei Faktoren k_1, k_2, k_3.

$$k_1 = v - u, \quad k_2 = v - u(1+u)^{\frac{1}{2}}, \quad k_3 = v + u(1+u)^{\frac{1}{2}},$$

wo wir uns für $(1+u)^{\frac{1}{2}}$ die Potenzreihe gesetzt zu denken haben. Es wird durch $k_1 = 0$ ein Primteiler $\mathfrak{P}_1$ definiert, dem geometrisch die Gerade $y = x$ entspricht. Durch $k_2 = 0$ und $k_3 = 0$ wird derselbe Primteiler $\mathfrak{P}_2$ definiert, dem geometrisch die Kurve $y^2 - x^2 - x^3 = 0$ entspricht. Es ist

$$\mathfrak{P}_1(u, v) = v - u, \quad \mathfrak{P}_2(u, v) = v^2 - u^2 - u^3.$$

Wir nennen jetzt einen Primteiler von der ersten Art, wenn er auch nur für eine Stelle eine von 1 *verschiedene zugeordnete Funktion hat.*

Es gilt dann der Satz[9]):

Jede Funktion des Körpers $K(x, y, z)$ läßt sich auf eine und nur eine Art in eine endliche Zahl von Primteilern erster Art zerlegen,

9) *Jung* A, § 3.

und zwei Funktionen, die dieselben Primteiler erster Art in derselben Potenz enthalten, unterscheiden sich höchstens durch einen konstanten Faktor.

Es *genügt* also, die Primteiler erster Art *anzugeben*. Damit ist nicht gemeint, daß die Funktion keine anderen Primteiler enthält, kann auch nicht gemeint sein, da ja jede Funktion unendlich viele Primteiler enthält.

Ferner gilt:

Hat man für die Funktion R des Körpers $K(x, y, z)$ die Zerlegung

$$R = \mathfrak{P}_1^{\varrho_1}\mathfrak{P}_2^{\varrho_2}\dots\mathfrak{P}_\mu^{\varrho_\mu}$$

in Primfaktoren, und ist $\mathfrak{P}_\alpha(u, v)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}_\alpha$ für eine Stelle S, so ist

$$R = \mathfrak{P}_1(u, v)^{\varrho_1}\mathfrak{P}_2(u, v)^{\varrho_2}\dots\mathfrak{P}_\mu(u, v)^{\varrho_\mu}E(u, v)$$

die Darstellung von R in der Umgebung von S durch die Hilfsgrößen u, v. Dabei ist E eine Einheit für die Stelle S.

Die Primteiler erster Art teilen wir wieder in zwei Arten.[10]) Ist $\mathfrak{P}$ ein solcher Primteiler, so werden für $\mathfrak{P} = 0$ entweder x und y beide konstant oder nicht. Im ersten Fall heißt $\mathfrak{P}$ *Punktprimteiler*, im zweiten Falle *Kurvenprimteiler*.[11])

b) *Die Primteiler zweiter Art*.[12])

Jeder Primteiler $\mathfrak{B}$ zweiter Art gehört zu einer bestimmten Stelle, etwa zur Stelle S. Sind u, v die Hilfsgrößen, durch die wir die Funktionen des Körpers $K(x, y, z)$ in der Umgebung von S darstellen, so können wir $\mathfrak{B}$ so definieren:

Wir setzen:

$$\bar{v} = a_1 u^{\frac{\alpha_1}{\beta'}} + a_2 u^{\frac{\alpha_2}{\beta'}} + \dots + a_{\nu-1} u^{\frac{\alpha_{\nu-1}}{\beta'}} + t u^{\frac{\beta''}{\beta'}},$$

wo die Exponenten von u positive rationale Zahlen mit dem Hauptnenner β' sind, wo $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{\nu-1} < \beta''$ und wo die $a_\varkappa$ konstant sind, während t ein Parameter ist. Stellt man alle Funktionen aus $K(x, y, z)$ durch u, v dar, setzt dann $v = \bar{v}$, ordnet nach Potenzen von u und setzt dann $u = 0$, so gehen alle Funktionen aus $K(x, y, z)$ in rationale Funktionen von t [oder in Konstante] über. Wir erhalten so eine Abbildung von $K(x, y, z)$ auf einen Körper $\mathfrak{B}$ vom Geschlechte 0, der ein Primteiler zweiter Art von $K(x, y, z)$ ist. $\bar{v}$ heißt die $\mathfrak{B}$ definierende Funktion. Es gelten die Sätze:

---

10) *Jung* A, § 2.

11) Die Primteiler, die *Hensel* mit Hilfe seiner Reihenentwicklungen definiert, sind die Kurvenprimteiler (vgl. *Hensel* C, § 15).

12) *Jung* A, § 2, Nr. 2, *Jung* F, Nr. 3.

1. Ist R eine Funktion aus $K(x, y, z)$, und stellen wir R in der Umgebung von S durch u, v dar, setzen dann $v = \bar{v}$ und entwickeln nach steigenden Potenzen u, so ist R genau durch $\mathfrak{B}^\lambda$ teilbar, wenn das Anfangsglied die λ^{te} Potenz von $u^{\frac{1}{\beta'}}$ enthält. Diese Definition stimmt mit der in Nr. 4 gegebenen überein. Denn aus der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen folgt, daß es immer eine rationale Funktion T von u, v gibt, so daß $T(u, \bar{v})$ genau durch die erste Potenz von $u^{\frac{1}{\beta'}}$ teilbar wird. Da aber u und v rationale Funktionen von x, y, z sind, so ist T eine Funktion des Körpers $K(x, y, z)$, und diese wird für $\mathfrak{B} = 0$ von möglichst niedriger Ordnung null. Und man definiert: Ist $\mathfrak{P}$ ein durch S gehender Primteiler erster Art, und beginnt die Entwicklung von $\mathfrak{P}(u, \bar{v})$ nach steigenden Potenzen von u mit der μ^{ten} Potenz von $u^{\frac{1}{\beta'}}$, so sagt man, $\mathfrak{P}$ ist durch $\mathfrak{B}^\mu$ teilbar. *Die Primteiler zweiter Art sind also in denen erster Art enthalten und durch diese mitbestimmt.*

2. Ist der Hauptnenner der Exponenten $\frac{\alpha_1}{\beta'}, \frac{\alpha_2}{\beta'}, \cdots \frac{\alpha_{\nu-1}}{\beta'}$ gleich δ, und ist $\beta' = \varepsilon\delta$, so sind die Funktionen des Körpers $\mathfrak{B}$ rationale Funktionen von

$$\tau = t^\varepsilon,$$

und es ist τ selbst eine Funktion des Körpers $\mathfrak{B}$.

Man setzt[13])

$$\text{Norm}\ (v - \bar{v}) = B(u, v; \tau), \tag{7}$$

wobei die Norm in bezug auf die zu $\bar{v}$ konjugierten Entwicklungen zu bilden ist. Es ist die Norm B eine ganze rationale Funktion von u, v und τ. Sie heißt die *Eichfunktion* von $\mathfrak{B}$. Ihr Grad in u, v ist (β', β''). Die Zahl $\beta = \beta' + \beta'' - 1$ heiße die *Ordnung* von $\mathfrak{B}$.

6. Die Primteiler zweiter Stufe.[14]) Jeder Primteiler erster Stufe ist ein algebraischer Körper einer Veränderlichen. Die Primteiler, die zu den Stellen eines solchen Körpers gehören, heißen Primteiler zweiter Stufe des Körpers $K(x, y, z)$. Ist im besonderen $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art, und ist $\mathfrak{P}(u, v)$ seine zugeordnete Funktion für eine Stelle S, durch die $\mathfrak{P}$ geht, so gibt die Gleichung $\mathfrak{P}(u, v) = 0$ für v eine oder mehrere Lösungen, die für $u = 0$ verschwindende gewöhnliche Potenzreihen von u oder einer gebrochenen Potenz von u sind. Ist etwa v_1 eine solche Lösung, und schreitet v_1 nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\alpha}}$

13) *Jung* F, Nr. 3, Schluß.

14) *Jung* B, § 3.

fort, so ordnen wir v_1 einen Primteiler zweiter Stufe $\mathfrak{p}_1$ zu, indem wir definieren, der Primteiler erster Art $\mathfrak{Q}$ ist durch $\mathfrak{p}_1^{\lambda}$ teilbar, wenn $\mathfrak{Q}(u, v_1)$ durch $\overline{u^{\alpha}}^{\lambda}$ teilbar ist. Man kann so für jeden Primteiler [zweiter Stufe] von $\mathfrak{P}$ bestimmen, ob und in welcher Potenz er in $\mathfrak{Q}$ enthalten ist. Das Produkt aller in $\mathfrak{Q}$ aufgehenden solchen Primteiler, jeden in der in $\mathfrak{Q}$ enthaltenen Potenz genommen, sei mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet. Man sagt dann: $\mathfrak{Q}$ geht für $\mathfrak{P} = 0$ in $\mathfrak{q}$ über. Ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1^{\varrho_1}\mathfrak{Q}_1^{\varrho_2}\dots\mathfrak{Q}_r^{\varrho_r}$ ein Produkt von Primteilern erster Art, und geht $\mathfrak{Q}_1$ für $\mathfrak{P} = 0$ über in $\mathfrak{q}_1$, so geht $\mathfrak{Q}$ für $\mathfrak{P} = 0$ über in $\mathfrak{q}_1^{\varrho_1}\mathfrak{q}_2^{\varrho_2}\dots\mathfrak{q}_r^{\varrho_r}$. Ist im besonderen $\mathfrak{Q}$ eine Funktion aus $K(x, y, z)$, so erhalten wir so die Zerlegung von $\mathfrak{Q}$ in Primteiler des Körpers $\mathfrak{P}$.

Man kann für jede Stelle S, durch die $\mathfrak{P}$ geht, bestimmen, durch welche Potenz der zu S gehörenden Primteiler von $\mathfrak{P}$

$$\frac{1}{du}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{dv}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial u}\,^{14a})$$

teilbar ist. Das Produkt aller dieser Primteiler, jeder in der festgestellten Potenz genommen, sei bezeichnet mit $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$. Es heißt $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ der *Divisor der mehrfachen Stellen von* $\mathfrak{P}$. Seine Ordnung ist immer endlich und immer gerade. Sie sei bezeichnet mit $2\sigma_{\mathfrak{P}}$.

7. Divisoren, Divisorenklassen.[15]) Ein Produkt von irgendwelchen Primteilern, jeden in irgendeiner positiven oder negativen ganzzahligen Potenz genommen, heißt *Divisor*. Kommen keine negativen Potenzen von Primteilern in ihm vor, so heißt er *ganz*. Ist $\mathfrak{Q}$ ein Divisor erster Art, enthält also $\mathfrak{Q}$ nur Primteiler erster Art, und ist $\mathfrak{b}$ ein Divisor zweiter Art, so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{b}^{-1}$ ganz, wenn $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist. Ist $\mathfrak{r}$ ein Divisor zweiter Stufe, dessen Primteiler zum Körper $\mathfrak{P}$ einer Veränderlichen gehören, so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{r}^{-1}$ ganz, wenn $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{r}$ teilbar ist, wenn also für $\mathfrak{P} = 0$ der Divisor $\mathfrak{Q}$ in einen durch $\mathfrak{r}$ teilbaren Divisor des Körpers $\mathfrak{P}$ übergeht.

Ebenso wie bei algebraischen Funktionen einer Veränderlichen heißen zwei Divisoren *äquivalent* ($\sim$), wenn ihr Quotient eine Funktion des Körpers ist. Alle zueinander äquivalenten Divisoren bilden eine *Klasse*. Jede Klasse ist durch irgendeinen in ihr enthaltenen Divisor vollkommen bestimmt. Ist $\mathfrak{Q}$ ein Divisor, so wird die Klasse, der $\mathfrak{P}$ angehört, mit $(\mathfrak{Q})$ bezeichnet. Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zwei Divisoren erster Stufe, so heißt die Klasse $(\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2)$ das Produkt und die Klasse $\left(\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}\right)$ der Quotient der Klassen $(\mathfrak{Q}_1)$, $(\mathfrak{Q}_2)$.

14a) Da $\mathfrak{P} = 0$, so ist $d\mathfrak{P} = \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial u}du + \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}dv = 0$ oder $\frac{1}{du}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v} = -\frac{1}{dv}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial u}$.

15) *Jung* B, § 8.

Die Klasse, der die Funktionen des Körpers $K(x, y, z)$ angehören, heißt *Hauptklasse.* Eine zweite besondere Klasse ist die *kanonische Klasse.* Sie wird folgendermaßen definiert. Ist S irgendeine Stelle des Körpers $K(x, y, z)$, und sind u, v die Hilfsgrößen, so wird

$$dx\,dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\,dv = \mathfrak{G}(u, v)\,du\,dv,$$

wo $\mathfrak{G}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist. Ist $\mathfrak{G}(u, v)$ keine Einheit für die Stelle $u = v = 0$, so läßt sich $\mathfrak{G}$ als Produkt von zugeordneten Funktionen von Primteilern erster Art darstellen, $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{P}_\nu^{\alpha_\nu}$. Man sagt dann, $dx\,dy$ ist durch $\mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{P}_\nu^{\alpha_\nu}$ teilbar. Macht man diese Überlegung für alle Stellen S, so erhält man einen Divisor, durch den $dx\,dy$ teilbar ist. Dieser hat die Form

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{J}_{xy}}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2}, \tag{8}$$

wo $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ die Nenner von x, y sind, während $\mathfrak{J}_{xy}$ ein ganzer Divisor ist. Die Klasse $(\mathfrak{K})$ heißt die kanonische Klasse des Körpers $K(x, y, z)$.

Über die in $\mathfrak{J}_{xy}$ enthaltenen Primteiler gilt folgendes:

a) Ist $\mathfrak{P}$ ein Punktprimteiler, so ist er mindestens in der ersten Potenz in $\mathfrak{J}_{xy}$ enthalten.

b) Ist $\mathfrak{P}$ ein Kurvenprimteiler von der Verzweigungsordnung $\alpha - 1$, so ist $\mathfrak{P}$ genau in der $(\alpha - 1)$-ten Potenz in $\mathfrak{J}_{xy}$ enthalten.

Der Divisor $\mathfrak{J}_{xy}$ heißt Verzweigungsdivisor von $K(x, y, z)$ in bezug auf xy. Es gilt der Satz: Das Differential $R\,dx\,dy$, wo R eine Funktion aus $K(x, y, z)$ ist, wird dann und nur dann nirgends unendlich, wenn

$$R = \frac{\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{J}_{xy}}\,\mathfrak{G},$$

wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor der kanonischen Klasse ist.[16])

Zwei Klassen, deren Produkt gleich der kanonischen Klasse ist, heißen *Ergänzungsklassen.*

Sind $\mathfrak{J}_{yz}$, $\mathfrak{J}_{zx}$ die Verzweigungsdivisoren in bezug auf yz, zx und ist $\mathfrak{N}$ der Nenner von z, so bestehen die Gleichungen[17])

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{J}_{yz}}{\mathfrak{L}^{l-2}\mathfrak{M}^m\mathfrak{N}^n}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{J}_{zx}}{\mathfrak{L}^l\mathfrak{M}^{m-2}\mathfrak{N}^n}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{J}_{xy}}{\mathfrak{L}^l\mathfrak{M}^m\mathfrak{N}^{n-2}}, \tag{9}$$

wo (l, m, n) der Grad von $G(x, y, z)$ in x, y, z ist. Der durch diese Gleichungen definierte Divisor $\mathfrak{D}$ ist ganz in bezug auf die Kurvenprimteiler, aber nicht notwendig ganz in bezug auf die Punktprim-

16) *Landsberg* A, *Jung* A. Bei *Landsberg* sind die Punktprimteiler nicht berücksichtigt. E, Nr. 11. Dort werden vom kanonischen System ausgezeichnete Kurven abgesondert.

17) *Jung*, Über den Doppelkurvendivisor einer algebraischen Fläche, Jahresbericht der D. Math.-Ver. 19 (1910) S. 199.

teiler. Er wird null längs der mehrfachen Kurven von G und heißt der *Divisor der mehrfachen Kurven von G.*

Über $\mathfrak{D}$ gilt der Satz:

Ist eine Funktion des Körpers $K(x, y, z)$ darstellbar in der Form

$$H = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{H}}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}\mathfrak{N}^{\nu}},$$

wo $\mathfrak{H}$ ein ganzer Divisor ist, so ist H als ganze rationale Funktion von x, y, z darstellbar, und zwar, wenn $\lambda \geqq l-1$, $\mu \geqq m-1$, $\nu \geqq n-1$ als ganze rationale Funktion vom Grade (λ, μ, ν) in x, y, z.

Aus (9) folgt, daß die kanonische Klasse auch durch den Divisor

$$\mathfrak{L}^{l-2}\mathfrak{M}^{m-2}\mathfrak{N}^{n-2}\mathfrak{D}^{-1}$$

definiert werden kann.

8. Grad und Geschlecht einer Klasse.[18]) Ist $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art und $\mathfrak{Q}$ ein Divisor erster Stufe erster Art, der $\mathfrak{P}$ nicht enthält, so wird die Ordnung des Divisors $\mathfrak{q}$, in den $\mathfrak{Q}$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergeht, mit $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ bezeichnet und die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ genannt. Ist $\mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{Q}_2$, und gehen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ für $\mathfrak{P} = 0$ in $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ über, so ist $\mathfrak{q}_1 \sim \mathfrak{q}_2$. Es gehen also die Divisoren einer Klasse $(\mathfrak{Q})$ für $\mathfrak{P} = 0$ über in die Divisoren einer Klasse $(\mathfrak{q})$ des Körpers $\mathfrak{P}$. Daher ist auch $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ gleich der Ordnung der Klasse, in die $(\mathfrak{Q})$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergeht, so daß $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1) = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_2)$, wenn $\mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{Q}_2$. Es hat also $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ auch eine Bedeutung, wenn $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$ enthalten ist. Sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei Primteiler erster Art, so ist $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) = (\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1)$. Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zwei Divisoren erster Art, und ist in Primteiler zerlegt

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{P}_{\nu}^{\alpha_{\nu}}, \qquad \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{P}_1^{\beta_1}\mathfrak{P}_2^{\beta_2}\ldots\mathfrak{P}_{\nu}^{\beta_{\nu}},$$

so setzt man

$$(10) \qquad (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_1) = \sum \alpha_k \beta_l (\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_l).$$

Ist $\mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{Q}_1'$, $\mathfrak{Q}_2 \sim \mathfrak{Q}_2'$, so ist $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{Q}_1', \mathfrak{Q}_2')$. Man nennt $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ die *Zahl der Schnittpunkte der Divisoren* $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$. Es ist hiernach $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ auch definiert, wenn $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ gemeinsame Primteiler haben.

Im besonderen heißt $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q})$ der *Grad der Klasse* $(\mathfrak{Q})$.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ sei sein Divisor der mehrfachen Stellen.

Unter den Klassen des Körpers $\mathfrak{P}$ ist von besonderer Bedeutung die kanonische Klasse (k). Es fragt sich, welche Klasse von $K(x, y, z)$

18) *Jung* D.

für $\mathfrak{P} = 0$ in (k) übergeht. Es gilt der Satz[19]: *Ist* $(\mathfrak{K})$ *die kanonische Klasse von* $K(x, y, z)$, *so geht die Klasse* $(\mathfrak{K}\mathfrak{P}\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}^{-1})$ *für* $\mathfrak{P} = 0$ *in die kanonische Klasse von* $\mathfrak{P}$ *über.* Da der Grad dieser Klasse gleich $2\pi_{\mathfrak{P}} - 2$ ist, wenn $\pi_{\mathfrak{P}}$ das Geschlecht von $\mathfrak{P}$ ist, so folgt

$$2\pi_{\mathfrak{P}} - 2 = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{K}) - 2\sigma_{\mathfrak{P}}, \tag{11}$$

wenn $2\sigma_{\mathfrak{P}}$ die Ordnung von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ ist.

Hiernach definiert man als *Geschlecht einer Klasse* $(\mathfrak{Q})$, wo $\mathfrak{Q}$ ein Divisor erster Art ist, die Zahl

$$\bar{\pi}_{\mathfrak{Q}} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}\mathfrak{K}) + 1. \tag{12}$$

Wenn $\mathfrak{Q}$ ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{Q})$ ist, so ist $\bar{\pi}_{\mathfrak{Q}}$ identisch mit dem *virtuellen Geschlecht* der $\mathfrak{Q}$ auf der Fläche G entsprechenden Kurve.

Nach *M. Noether* heißt das Geschlecht $p^{(1)}$ der kanonischen Klasse das Kurvengeschlecht der Fläche G und der Grad der kanonischen Klasse, eine auch von *M. Noether* eingeführte Zahl, wird mit $p^{(2)}$ oder auch mit $\omega - 1$ bezeichnet. Es ist $p^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}^2) + 1 = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 1$, so daß sich sehr einfach die *Noether*sche Gleichung $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$ ergibt.

9. Birationale Transformation.[20]) Sind ξ, η irgend zwei Funktionen des Körpers $K(x, y, z)$, die nicht konstant sind und zwischen denen keine Gleichung besteht, so können wir ξ, η geradesogut als unabhängige Veränderliche wählen wie x, y. Es gibt immer eine Größe ζ aus $K(x, y, z)$, so daß alle Funktionen aus $K(x, y, z)$ auch als rationale Funktionen von ξ, η, ζ dargestellt werden können, wo zwischen ξ, η, ζ eine irreduktible Gleichung $\Gamma(\xi, \eta, \zeta) = 0$ besteht. Es sind die Körper $K(x, y, z)$ und $K(\xi, \eta, \zeta)$ miteinander identisch. Den Übergang von einem zum andern nennt man *birationale Transformation.*

Bei der birationalen Transformation *bleiben die Primteiler invariant,* sowohl die erster wie zweiter Stufe. Aber die *Einteilung* der Primteiler erster Stufe in zwei Arten ist *nicht invariant,* da diese abhängt von der Definition der Stellen und damit von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen. Man nennt diejenigen Primteiler, die in bezug auf $K(x, y, z)$ und $K(\xi, \eta, \zeta)$ von verschiedener Art sind, *ausgezeichnete Primteiler* oder *Fundamentalprimteiler für die Transformation.* Ihre Zahl ist immer endlich. Man nennt ferner diejenigen Primteiler erster Art von $K(x, y, z)$, die überhaupt bei irgendeiner Transformation in einen Primteiler zweiter Art übergehen können, *ausgezeichnete Primteiler von* $K(x, y, z)$. Ihnen entsprechen auf der Fläche G die ausgezeichneten Kurven. Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\lambda$ diejenigen Primteiler

19) *Jung* B und *Jung* G; E, Nr. 12, 13. Hier zeigt sich besonders deutlich, wie viel einfacher die Definitionen mit Hilfe der arithmetischen Theorie werden.

20) *Jung* A und *Jung* F.

erster Art von $K(x, y, z)$, die in bezug auf $K(\xi, \eta, \zeta)$ von der zweiten Art sind. Sie seien als Primteiler von $K(\xi, \eta, \zeta)$ bezeichnet mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\lambda$. Es seien $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\mu$ die Primteiler erster Art von $K(\xi, \eta, \zeta)$, die in bezug auf $K(x, y, z)$ von der zweiten Art sind. Sie seien als solche bezeichnet mit $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_\mu$. Ist $\mathfrak{P}$ irgendein Primteiler erster Art von $K(x, y, z)$, so bezeichnet man mit $s(\mathfrak{P})$ das Produkt der in $\mathfrak{P}$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_\mu$, jeden in der Potenz genommen, in der er in $\mathfrak{P}$ enthalten ist. Die entsprechende Bedeutung habe $s(\mathfrak{Q}')$, wenn $\mathfrak{Q}'$ ein Primteiler erster Art in bezug auf $K(\xi, \eta, \zeta)$ ist.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art in bezug auf $K(x, y, z)$ und nicht einer der ausgezeichneten Primteiler $\mathfrak{A}_\alpha$, so bezeichnen wir $\mathfrak{P}$ als Primteiler von $K(\xi, \eta, \zeta)$ mit $\mathfrak{P}'$. Es gelten dann folgende Transformationsgleichungen

$$(13) \qquad \frac{\mathfrak{A}_k}{s(\mathfrak{A}_k)} = \mathfrak{a}_k, \qquad \frac{\mathfrak{B}_k}{s(\mathfrak{B}_k)} = \mathfrak{b}_k, \qquad \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})} = \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}.$$

Wenn die Klasse $(\mathfrak{K})$ oder eine ihrer positiven Potenzen einen ganzen Divisor enthält, so ist $s(\mathfrak{A}_k) = s(\mathfrak{B}_k) = 1$.[21])

Es sei $A_k(u, v; \tau)$ die Eichfunktion von $\mathfrak{a}_k$ und $B_k(u, v; \sigma_k)$ die von $\mathfrak{b}_k$. Die Ordnung von A_k in (u, v) sei (α_k', α_k''), die bei B_k sei (β_k', β_k''). Setzt man

$$(14) \qquad \begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_k' + \alpha_k'' - 1, \quad \beta_k = \beta_k' + \beta_k'' - 1, \\ \mathfrak{a} &= \mathfrak{a}_1^{\alpha_1} \mathfrak{a}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{a}_\lambda^{\alpha_\lambda}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1^{\beta_1} \mathfrak{b}_2^{\beta_2} \ldots \mathfrak{b}_\mu^{\beta_\mu}, \end{aligned}$$

so geht die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{b})$ über in die Klasse $(\mathfrak{K}'\mathfrak{a})$, wenn $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse von $K(x, y, z)$ und $(\mathfrak{K}')$ die von $K(\xi, \eta, \zeta)$ ist. Hieraus folgt dann leicht der Satz, daß jeder ganze Divisor der Klasse $(\mathfrak{K})$ durch alle ausgezeichneten Kurven des Körpers $K(x, y, z)$ teilbar sein muß.

Es sei noch bemerkt, daß sich die Zahl der Schnittpunkte von zwei Primteilern $\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l$ oder $\mathfrak{b}_k, \mathfrak{b}_l$ so definieren läßt, daß die Zahl der Schnittpunkte zweier aus Primteilern erster Art von $K(x, y, z)$ und aus Primteilern $\mathfrak{b}_k$ zusammengesetzten Divisoren gleich der Zahl der Schnittpunkte derjenigen Divisoren ist, in die sie beim Übergang zu $K(\xi, \eta, \zeta)$ übergehen. Dabei ist die Zahl der Schnittpunkte eines Divisors erster Art von $K(x, y, z)$ mit einem der Primteiler $\mathfrak{b}_k$ und ebenso die Zahl der Schnittpunkte eines Divisors erster Art von $K(\xi, \eta, \zeta)$ mit einem Primteiler $\mathfrak{a}_k$ gleich null zu setzen. So folgt z. B. aus $(\mathfrak{K}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{K}'\mathfrak{a})$

$$(15) \qquad (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}).$$

21) *Jung* F, Nr. 8.

Wenn die Klasse $(\mathfrak{K})$ oder eine ihrer positiven Potenzen einen ganzen Divisor enthält, so folgt hieraus[22])

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + \lambda = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + \mu, \tag{16}$$

wo λ die Zahl der $\mathfrak{a}_k$ und μ die der $\mathfrak{b}_k$ ist.

10. Fundamentalsysteme für die Vielfachen eines Divisors.[23]) Es seien $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ die Nenner von x und y. Es sei $\mathfrak{Q}$ irgendein $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ nicht enthaltender Divisor erster Art. Man kann sich die Aufgabe stellen, alle Funktionen aus $K(x, y, z)$ zu bestimmen, die in der Form darstellbar sind

$$\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{G}}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}}, \tag{17}$$

wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist. Wir nennen die Funktionen der Form (17) Vielfache von $\mathfrak{Q}$. Wenn aber $\mathfrak{G}$ nur ganz ist in bezug auf Kurvenprimteiler, so nennen wir sie unvollständige Vielfache von $\mathfrak{Q}$.

Es gelten die Sätze:

Man kann n Funktionen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des Körpers $K(x, y, z)$ so finden, daß alle unvollständigen Vielfachen von $\mathfrak{Q}$ und nur diese sich in der Form darstellen lassen

$$g_1\xi_1 + g_2\xi_2 + \cdots + g_n\xi_n,$$

wo die g_α ganze rationale Funktionen von x, y sind. Die Funktionen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ heißen ein *Fundamentalsystem für die Vielfachen von* $\mathfrak{Q}$.

Das zum System (ξ_{kl}) reziproke und adjungierte System ist Fundamentalsystem für die unvollständigen Vielfachen von $\mathfrak{J}_{xy}\mathfrak{Q}^{-1}$.

Während sich aus den entsprechenden Sätzen bei den algebraischen Funktionen einer Veränderlichen sehr einfach der *Riemann-Roch*sche Satz ergibt, ist das hier nicht der Fall.

IV. Die Zeuthen-Segresche Invariante und das numerische Geschlecht.

11. Die Fläche F.[24]) Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ vier linear unabhängige zueinander äquivalente ganze Divisoren und $\mathfrak{A}_0$ sei irgendein Divisor der Klasse $(\mathfrak{A}_\alpha)$. Es sind dann

$$x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0}, \quad x_3 = \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}, \quad x_4 = \frac{\mathfrak{A}_4}{\mathfrak{A}_0}$$

Funktionen des Körpers K und ebenso die Quotienten $x_1 : x_4$, $x_2 : x_4$, $x_3 : x_4$. Zwischen diesen besteht also eine irreduzible algebraische Gleichung, so daß die x_α einer homogenen Gleichung

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

22) *Jung* F, Nr. 9.

23) *Hensel* A; *Jung* B.

24) *Jung* H, Kap. I, § 2—4; *Jung* J, I und II.

genügen. Deuten wir die x_α als homogene Punktkoordinaten, so wird hierdurch eine algebraische Fläche F definiert, und umgekehrt läßt sich jede algebraische Fläche in dieser Weise definieren. Wir können und wollen annehmen, daß der Körper K mit dem Körper der rationalen Funktionen von $x_1 : x_4$, $x_2 : x_4$, $x_3 : x_4$ übereinstimmt.

Es seien x_1', x_2', x_3', x_4' die Ebenenkoordinaten der Tangentialebenen von F, und es sei $x_\alpha' = \frac{\mathfrak{A}_\alpha'}{\mathfrak{A}_0'}$, wo $\mathfrak{A}_\alpha'$ ganze Divisoren ohne gemeinsame Teiler sein sollen. Durch passende Definition der Stellen des Körpers $K(x, y, z)$ kann man erreichen, daß weder die $\mathfrak{A}_\alpha$ noch die $\mathfrak{A}_\alpha'$ an einer Stelle gleichzeitig verschwinden. Es entspricht dann jeder Stelle von $K(x, y, z)$ eineindeutig eine Stelle von F und eine Berührungsebene. Ist ferner $\mathfrak{B}$ ein Primteiler zweiter Art des Körpers $K(x, y, z)$, so werden für $\mathfrak{B} = 0$ sowohl die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_\alpha$ wie die der $\mathfrak{A}_\alpha'$ konstant, so daß jedem Primteilen zweiter Art ein bestimmter Punkt und eine bestimmte Tangentialebene entspricht.

Es sei jetzt $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art. Dann sind folgende vier Fälle möglich:

I. Für $\mathfrak{P} = 0$ werden weder die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_\alpha$ noch die der $\mathfrak{A}_\alpha'$ konstant.

II. Für $\mathfrak{P} = 0$ werden die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_\alpha$ konstant, aber nicht die der $\mathfrak{A}_\alpha'$.

III. Für $\mathfrak{P} = 0$ werden die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_\alpha$ nicht konstant, wohl aber die der $\mathfrak{A}_\alpha'$.

IV. Für $\mathfrak{P} = 0$ werden sowohl die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_\alpha$ wie die der $\mathfrak{A}_\alpha'$ konstant.

Wir lassen in allen vier Fällen dem Primteiler $\mathfrak{P}$ eine Kurve auf der Fläche F entsprechen, die wir auch mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen. Im Falle I ist $\mathfrak{P}$ eine wirkliche Kurve, und die Berührungsebenen von F in ihren Punkten sind im allgemeinen voneinander verschieden. Im Falle II entspricht dem Primteiler $\mathfrak{P}$ ein Punkt H der Fläche F, die Kurve $\mathfrak{P}$ ist *in einem Punkt kondensiert*, aber die Berührungsebenen von F in den Stellen der Kurve $\mathfrak{P}$ sind im allgemeinen voneinander verschieden. Sie bilden einen Kegel h mit der Spitze H. Es ist H ein isolierter singulärer Punkt von F, und der Kegel h ist der Berührungskegel von F in H. Im Falle III ist $\mathfrak{P}$ eine wirkliche Kurve, aber die Berührungsebenen von F in den Stellen von $\mathfrak{P}$ fallen alle zusammen in eine Ebene H'. Diese Ebene berührt also F längs $\mathfrak{P}$. Wir sagen in diesem Falle: $\mathfrak{P}$ ist *in eine Ebene kondensiert*. Der Fall III entspricht dem Falle II dual. Im Falle IV ist die Kurve $\mathfrak{P}$ in einem Punkt H kondensiert und die Berührungsebenen von F in den Stellen

von $\mathfrak{P}$ fallen alle in eine Ebene H' zusammen. Die Kurve $\mathfrak{P}$ ist gleichzeitig kondensiert und ebene Berührungskurve. Der Punkt H kann in diesem Falle ein gewöhnlicher Punkt der Fläche F sein. Trotzdem ist es am einfachsten, auch in diesem Falle dem Primteiler $\mathfrak{P}$ eine Kurve auf F entsprechen zu lassen.

12. Die Zeuthen-Segresche Invariante.[25]) Es sei $c_1\mathfrak{G}_1 + c_2\mathfrak{G}_2$ ein Kurvenbüschel auf einer algebraischen Fläche F. Ihre Ordnung sei n, ihre Klasse n'. Es sei δ die Anzahl der Kurven des Büschels mit Doppelpunkt. Das Geschlecht einer allgemeinen Kurve des Büschels sei π, und die Zahl der festen Punkte des Büschels sei N. Dann ist

$$J = \delta - 4\pi - N$$

nach *Zeuthen* und *Segre* eine Invariante der Fläche F, d. h. sie ist unabhängig von der Wahl des Kurvenbüschels. Sie heißt die *Zeuthen-Segresche* Invariante. Es entsteht die Frage, wie sind δ und N zu definieren, wenn zugelassen wird, daß unter den Kurven des Büschels irgendwie zerfallende vorkommen und wenn Kurven des Büschels irgendwelche Singularitäten haben. Diese Frage ist von *Jung* vollständig beantwortet.

Es sei $\mathfrak{G}$ irgendeine Kurve des Büschels. Es sei $\mathfrak{G}'$ die Kurve, die alle in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Primkurven, aber jede nur einmal, enthält. Es werde gesetzt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}\mathfrak{G}'.$$

Natürlich ist nur für eine endliche Zahl von Kurven $\mathfrak{G}$ die Kurve $\mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}$ von 1 verschieden. Es bedeute $\nu(\mathfrak{G}')$ die Zahl der Zweige von $\mathfrak{G}'$, die durch die mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}'$ gehen, $\varrho(\mathfrak{G}')$ die Zahl dieser Stellen. ν_α, ϱ_α seien dieselben Zahlen für eine allgemeine Kurve $\mathfrak{G}_\alpha$ des Büschels. Es sei ferner $\pi(\mathfrak{G}')$ das Geschlecht von $\mathfrak{G}'$ und $2\sigma(\mathfrak{G}')$ die Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}'$. Es seien π_α, $2\sigma_\alpha$ dieselben Zahlen für eine allgemeine Kurve $\mathfrak{G}_\alpha$. Das Geschlecht $\pi(\mathfrak{G}')$ soll, wenn etwa $\mathfrak{G}' = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_r$, wo die $\mathfrak{P}_\alpha$ Primkurven vom Geschlechte π_α sind, definiert sein durch

$$\pi(\mathfrak{G}') - 1 = \sum_{\alpha=1}^{r}(\pi_\alpha - 1).$$

Es sei weiter $z_S(\mathfrak{G}')$ die Zahl der Schnittpunkte von $\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial\mathfrak{G}'}{\partial v} = 0$ in einer mehrfachen Stelle S von $\mathfrak{G}'$ und

$$z(\mathfrak{G}') = \sum_S z_S(\mathfrak{G}'),$$

wo die Summe über alle mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}'$ zu erstrecken ist, und es bedeute δ_α dieselbe Zahl für eine allgemeine Kurve $\mathfrak{G}_\alpha$ des Büschels.

25) E, Nr. 14. *Jung,* E, H und K, Kap. VI.

Wir setzen dann

$$(18)\quad \begin{cases} \delta(\mathfrak{G}) = 2\pi_a - 2 + \nu_a - \varrho_a - \{2\pi(\mathfrak{G}') - 2 + \nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}')\} \\ \quad = \nu_a - \varrho_a - 2\sigma_a - \{\nu(\mathfrak{G}') - \varrho(\mathfrak{G}') - 2\sigma(\mathfrak{G}')\} \\ \qquad + 2(\mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{G}_a) - (\mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}) + (\mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{K}) \\ \quad = z_a - z(\mathfrak{G}') + 2(\mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{G}_a) - (\mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}) + (\mathfrak{V}^*_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{K}). \end{cases}$$

Hier ist $\mathfrak{G}_a$ eine allgemeine Kurve des Büschels und $\mathfrak{K}$ eine Kurve der kanonischen Klasse. Es ist dann in der Definitionsformel für die *Zeuthen-Segre*sche Invariante zu setzen

$$(19)\qquad \delta = \sum_{\mathfrak{G}} \delta(\mathfrak{G}),$$

wo die Summe über alle Kurven $\mathfrak{G}$ des Büschels zu erstrecken ist.

Ferner hat man zu setzen

$$(20)\qquad N = 2(\nu_a - \varrho_a) + f,$$

wo f die Zahl der festen Stellen des Büschels ist.

Für das Verhalten von J bei birationaler Transformation gilt:

Es ist $$J + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$$

invariant bei birationaler Transformation, wo $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse ist.

13. Das numerische oder arithmetische Geschlecht p_a von F.[26]) Es ist

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + J = 12p_a + 8,$$[27])

wo p_a das arithmetische Geschlecht von F ist. Da J jetzt für beliebige Flächen und Kurvenbüschel definiert ist, so ergibt sich die Möglichkeit, p_a für Flächen mit beliebigen Singularitäten zu berechnen. Man findet folgendes:

a) Es seien $H_1, H_2, \ldots, H_s$ die isolierten singulären Punkte der Fläche F. Es sei $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ ein durch H_α gehender ebener Schnitt von F ohne besondere Lage. Es bedeute $\mathfrak{C}_\alpha$ die Kurve, die alle Primkurven von $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ enthält, aber jede nur in der ersten Potenz und es werde $\mathfrak{A}^{(\alpha)} = \mathfrak{V}^{(\alpha)}\mathfrak{C}_\alpha$ gesetzt. Ist $\mathfrak{Q}$ irgendeine ganze Kurve, die keine Primkurve in höherer als der ersten Potenz enthält, so verstehen wir unter $2\sigma(\mathfrak{Q})$ die Ordnung ihres Divisors der mehrfachen Stellen, unter $\nu(\mathfrak{Q})$ die Zahl der Zweige von $\mathfrak{Q}$, die durch die mehrfachen Stellen gehen, und unter $\varrho(\mathfrak{Q})$ die Anzahl der mehrfachen Stellen, und wir setzen

$$(21)\qquad \mu(\mathfrak{Q}) = 2\sigma(\mathfrak{Q}) - \nu(\mathfrak{Q}) + \varrho(\mathfrak{Q}).$$

---

26) *Jung* G, ferner Arbeiten von *Jung* in den Mitteilungen der Math. Ges. in Hamburg 5, Heft 1 (1911), p. 20; 5, Heft 2 (1913), p. 82; 5, Heft 5 (1916), p. 194.

27) E, Nr. 14.

Wir setzen weiter

$$h_\alpha = (\mathfrak{V}^{(\alpha)}, \mathfrak{K}) - (\mathfrak{V}^{(\alpha)}, \mathfrak{V}^{(\alpha)}) + \mu(\mathfrak{C}_\alpha) \tag{22}$$

und

$$h = \sum_{\alpha=1}^{s} h_\alpha. \tag{23}$$

Ferner sei $\mathfrak{R}_0$ die von in Punkte kondensierten Kurven befreite Rückkehrkurve $\mathfrak{R}$, und es sei in Primkurven zerlegt

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_1^{\varrho_1} \mathfrak{R}_2^{\varrho_2} \dots \mathfrak{R}_k^{\varrho_k}.$$

Es bedeute r_α den Rang von $\mathfrak{R}_\alpha$, d. h. die Zahl der durch eine beliebige Gerade gehenden Tangenten von $\mathfrak{R}_\alpha$. Wir setzen

$$r = \sum_{\alpha=1}^{k} \varrho_\alpha r_\alpha. \tag{24}$$

Es ist dann

$$12(p_a + 1) = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) - 4(p-1) - n + n' + h + r, \tag{25}$$

wo p das Geschlecht eines allgemeinen ebenen Schnittes ist. Sind h', r' die den Zahlen h, r dual entsprechenden, und ist p' das Geschlecht eines allgemeinen Berührungskegels, so ist auch

$$12(p_a + 1) = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) - 4(p'-1) - n' + n + h' + r'. \tag{26}$$

Man kann der Formel für p_a verschiedene Formen geben. Z. B.

$$\begin{cases} 6p_a = (n-1)(n-2)(n-3) - 4b(n-3) - c(n-1) \\ \qquad + (\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) + (\mathfrak{D}, \mathfrak{R}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) + \frac{1}{2}(h + r). \end{cases} \tag{27}$$

Für den Fall, daß F an Singularitäten nur eine Doppelkurve hat, wird $h = 0$, $\mathfrak{R} = 1$, $r = 0$, und es läßt sich $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$ berechnen. Man erhält dann die bekannte Formel für p_a. Im allgemeinen Fall ist die Bestimmung von $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$, $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$, $(\mathfrak{R}, \mathfrak{D})$ als Funktionen von n noch nicht gelungen.

b) Verwendet man nichthomogene Koordinaten, so erhält man für p_a folgende Formel. Es sei $G(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche G. Sie sei in x, y, z vom Grade (l, m, n) Es habe G an Singularitäten nur eine Doppelkurve vom Geschlechte π mit τ dreifachen Punkten, ferner irgendwelche isolierte Doppelpunkte und t dreifache isolierte Punkte. Ebenen senkrecht zur x-, y-, z-Achse mögen die Doppelkurve in d', d'', d''' Punkten schneiden. Dann ist[28])

$$\begin{cases} p_a = (l-1)(m-1)(n-1) - (l-2)d' - (m-2)d'' - (n-2)d''' \\ \qquad + \pi + 2\tau - t - 1. \end{cases} \tag{28}$$

28) *Jung*, Mitteil. d. Math. Ges. in Hamburg 5, Heft 1, p. 21. Dort steht durch einen Fehler in der Berechnung 3τ statt 2τ.

(Abgeschlossen im April 1921.)

Erschienene Bände bzw. Hefte:

Band I. **Arithmetik und Algebra**, in 2 Teilen. Vollständig erschienen.
- II. **Analysis**, in 3 Teilen. Teil I, in 9 Heften, vollständig erschienen. Teil II, in 5 Heften vollständig erschienen. Teil III, in 10—11 Heften, davon 5 erschienen.
- III. **Geometrie**, in 4 Teilen. Teil I, in 9 Heften, davon 7 erschienen. Teil II, in 10—11 Heften, davon 7 erschienen. Teil III, in 5 Heften vollständig erschienen. Teil IV, Nachträge.
- IV. **Mechanik**, in 4 Teilbänden und 1 Registerband. Teilband I, III und IV vollständig erschienen. II. Teilband in 4—5 Heften, davon 3 erschienen. Registerband in 1 Heft (in Vorbereitung).
- V. **Physik**, in 3 Teilen. Teil I, in 6 Heften, davon 5 erschienen. Teil II, in 5 Heften, davon 3 erschienen. Teil III, in 6—7 Heften, davon 3 erschienen.
- VI, 1. **Geodäsie und Geophysik**, in 1 Teilband. I. Hälfte in 3 Heften erschienen. II. Hälfte in 5 Heften, davon 4 erschienen.
- VI, 2. **Astronomie**, in 1 Teilband, in 10—11 Heften, davon 7 erschienen.

Unter der Presse:

Band II. Teil 3. Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlicher. Redigiert unter Leitung von **E. Borel** in Paris, bearbeitet von **A. Rosenthal** in München.
- III. - 1. Polyeder und Raumeinteilungen. Von **E. Steinitz** in Kiel.
- III. - 2. Algebraische Liniengeometrie. Von **K. Zindler** in Innsbruck.
- III. - 4. Neuere Arbeiten der Invariantentheorie: a Algebraische Invarianten: **R. Weitzenböck** in Graz.
- V. - 1. Physikalische und Elektrochemie. Von **K. F. Herzfeld** in München.
- V. - 2. Relativitätstheorie. Von **W. Pauli** in München.
- VI. - 2. Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper. Von **S. Oppenheim** in Wien. — Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Von **S. Oppenheim** in Wien. Nebst einem Beitrag: Gravitation und Relativitätstheorie. Von **Th. Kottler** in Wien.

Band II: Analysis, in 3 Teilen. Redigiert von H. Burkhardt † (1898–1914), W. Wirtinger (1905–1912) in Wien, R. Fricke in Braunschweig u. E. Hilb in Würzburg.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil,
redigiert von H. Burkhardt † (1898—1914).

*Vorwort zu Bd. II von **R. Fricke** in Braunschweig.
*Inhaltsverzeichnis von Band II, Teil 1.

A. Analysis reeller Größen.

*1. Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre: **A. Pringsheim** in München.
*2. Differential- u. Integralrechnung: **A. Voß** in München.
*3. Bestimmte Integrale: **G. Bruel** †.
*4. Gewöhnliche Differentialgleichungen:
*4a. Existenz der Lösungen: **P. Painlevé** in Paris.
*4b. Integrationsmethoden: **E. Vessiot** in Lyon.
*5. Partielle Differentialgleichungen: **E. v. Weber** in Würzburg.
*6. Kontinuierliche Transformationsgruppen: **L. Maurer** in Tübingen und **H. Burkhardt** (†).
*7. Randwertaufgaben:
*7a. Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen: **M. Böcher** in Cambridge, Mass.
*7b. Potentialtheorie (Theorie der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung): **H. Burkhardt** (†) und **W. Fr. Meyer** in Königsberg.
*7c. Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen: **A. Sommerfeld** in München.
*8. Variationsrechnung: **A. Kneser** in Breslau.
*8a. Weiterentwickelung der Variationsrechnung in den letzten Jahren: **E. Zermelo** in Zürich und **H. Hahn** in Czernowitz.
*9. Trigonometrische Interpolation: **H. Burkhardt** (†).
*10. Kugelfunktionen: **A. Wangerin** in Halle.
*11. Funktional-Gleichungen und -Operationen: **S. Pincherle** in Bologna.
*12. Trigonometrische Reihen und Integrale bis 1850: **H. Burkhardt** (†).

*Register zu Band II, Teil 1.

II. Teil,
redigiert von H. Burkhardt † (1898—1914), W. Wirtinger (1905—1912) in Wien und R. Fricke in Braunschweig.

*Inhaltsverzeichnis von Band II, Teil 2.

B. Analysis komplexer Größen.

*1. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen: **W. F. Osgood** in Cambridge, Mass.
*2. Algebraische Funktionen und ihre Integrale: **W. Wirtinger** in Wien.
*3. Elliptische Funktionen: **R. Fricke** in Braunschweig, Mit Benutzung von Vorarbeiten und Ausarbeitungen der Herren **J. Harkness** in Montreal (Canada) und **W. Wirtinger** in Wien.
*4. Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen: **R. Fricke** in Braunschweig.
*5. Lineare Differentialgleichungen: **E. Hilb** in Würzburg.
*6. Nichtlineare Differentialgleich.: **E. Hilb** in Würzburg.
*7. Abelsche Funktionen und Thetafunktionen: **A. Krazer** in Karlsruhe und **W. Wirtinger** in Wien.

*Register zu Band II, Teil 2.

III. Teil,
redigiert von H. Burkhardt † (1898—1914), R. Fricke in Braunschweig u. E. Hilb in Würzburg.

Inhaltsverzeichnis von Band II, Teil 3.

C. Nachträge.

*1. Algebraische Analysis: **A. Pringsheim** in München und **G. Faber** in München.
*2. Graphische und numerische Quadratur und graphische und numerische Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen: **C. Runge** in Göttingen und **Fr. A. Willers** in Charlottenburg.
*3. Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung: **L. Lichtenstein** in Berlin.
*4. Neuere Untersuchungen über Funktionen komplexer Variabler: **L. Bieberbach** in Frankfurt a. M.
*5 Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen: **K. Hensel** in Marburg a. L.
*6. Arithmetische Theorien der algebraischen Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen: **H. W. E. Jung** in Halle a. d. S.
†7. Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Variabler: Redigiert unter Leitung von **E. Borel** in Paris, bearbeitet von **A. Rosenthal** in München.
8. Fortschritte bezügl. der Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus: **L. Lichtenstein** in Berlin.
9. Theorie der Integralgleichungen: **O. Toeplitz** in Kiel und **E. Hellinger** in Frankfurt a. M.
10. Trigonometrische Reihen u. Integrale in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts: **M. Riesz** in Stockholm.
11. Allgemeine Reihenentwickelungen: **E. Hilb** in Würzburg und **O. Szász** in Frankfurt a. M.
12. Theorie der Differenzengleichungen: **N. E. Nörlund** in Lund.
13. Beziehungen zwischen Funktionentheorie und Zahlentheorie: **H. A. Bohr** in Kopenhagen und **H. Cramér** in Mörby.

Register zu Band II, Teil 3.

Bisher erschien:

Teil I	Heft	1	(A 1—3).	[160 S.]	1899.	n. ℳ 4.80.	Teil II	Heft	2/3	(B 3—4).	[294 S.]	1913.	n. ℳ 9.20.
— I	—	2/3	(A 3—5).	[239 S.]	1900.	n. ℳ 7.50.	— II	—	4	(B 5).	[91 S.]	1914.	n. ℳ 2.80.
— I	—	4	(A 4—7).	[160 S.]	1900.	n. ℳ 4.80.	— II	—	5	(B 6—7).	[311 S.]	1921.	n. ℳ 22.40.
— I	—	5	(A 8—10).	[199 S.]	1904.	n. ℳ 6.—.	— III	—	1	(C 1).	[46 S.]	1909.	n. ℳ 1.50.
— I	—	6	(A 11).	[57 S.]	1906.	n. ℳ 1.60.	— III	—	2	(C 2).	[129 S.]	1915.	n. ℳ 4.20.
— I	—	7	(A 12).	[336 S.]	1914.	n. ℳ 10.50.	— III	—	3	(C 3).	[201 S.]	1919.	n. ℳ 7.60.
— I	—	8	(A 12).	[9 S.]	1915.	n. ℳ 6.20.	— III	—	4	(C 4).	[153 S.]	1921.	n. ℳ 10.—
— II	—	1	(B 1—2).	[160 S.]	1901.	n. ℳ 5.20.	— III	—	5	(C 5—6).	[142 S.]	1921.	n. ℳ 8.80.

Auf diese Preise kommen die Aufschläge des Verlags und der Buchhandlungen.

UNIVERSITY OF MAINE
3 7550 01697260 7

Höhere Mathematik für Ingenieure

Von Professor Dr. J. Perry

Autorisierte deutsche Bearbeitung von

Geh. Hofrat Dr. R. Fricke
Professor an der Techn. Hochschule in Braunschweig

und

F. Süchting
Professor an der Bergakademie in Clausthal

3. Auflage. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. Geh. M. 20.—, geb. M. 22.—

In sachlicher Hinsicht haben wiederum in der jetzt vorliegenden dritten Auflage namentlich die technischen Teile zahlreiche Verbesserungen und Ergänzungen erfahren, aber auch rein äußerlich unterscheidet sich das Werk wesentlich von der früheren Ausgabe, da an Stelle der unübersichtlichen Numerierung durchweg die Einteilung in gut gegliederte Paragraphen getreten ist. Hierdurch dürfte das Perrysche Buch, dessen innere Vorzüge ja längst in der Fachwelt ihre Anerkennung gefunden haben, an Wert noch erheblich gewonnen haben.

Physik und Kulturentwicklung

durch technische u. wissenschaftl. Erweiterung der menschl. Naturanlagen

Von Geh. Hofrat Dr. Otto Wiener
Professor an der Universität Leipzig

2. Auflage. Mit 72 Abbildungen. Geh. M. 6.—, geb. M. 8.80

Der bekannte Leipziger Physiker zeigt in seinem bereits nach kurzer Zeit in 2. Auflage vorliegenden Buche, wie die allgemeine Kulturentwicklung auf der wissenschaftlichen und technischen Erweiterung unserer Naturanlagen beruht, wie die Leistungsfähigkeit und das Tätigkeitsfeld der Sinne mit Hilfe von Apparaten, der Geistesanlagen durch abkürzende wissenschaftliche Verfahren und das künstliche Gedächtnis, die Bücher, und der Gliedmaßen durch Werkzeuge und Maschinen vergrößert und erweitert worden sind.

Die durch zahlreiche Abbildungen veranschaulichte Darstellung gibt so weitesten Kreisen einen sehr interessanten Überblick über die mannigfachen Anwendungen, welche die Technik auf den verschiedensten Gebieten von den wissenschaftlichen Ergebnissen physikalischer Forschung gemacht hat.

Dynamische Meteorologie

von Dr. Felix M. Exner
o. ö. Professor der Physik der Erde an der Universität Wien und
Direktor der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie u. Geodynamik

Mit 68 Figuren im Text. [IX u. 308 S.] gr. 8. 1917. Geh. M. 16.—, geb. M. 18.—

Das aus Vorlesungen an den Universitäten Wien und Innsbruck hervorgegangene Buch bietet eine Zusammenfassung der Fortschritte, die seit etwa 25 Jahren auf dem Gebiete der theoretischen Meteorologie, insbesondere der Bewegungserscheinungen der Atmosphäre, gemacht wurden und in vielen einzelnen Abhandlungen zerstreut sind.

Das Buch gibt eine theoretische Darstellung der älteren und neuesten Ergebnisse und Probleme. Es werden zunächst die Gasgesetze für trockene und feuchte Luft und die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen dargelegt. Die folgenden Kapitel behandeln sodann die Statik, Kinematik und Dynamik der Atmosphäre, insbesondere den allgemeinen Kreislauf, die Dynamik zyklonaler Bewegungen, die unperiodischen Veränderungen an einem Orte der Atmosphäre, dieselben auch in synoptischer Darstellung. Das Schlußkapitel bringt eine Darstellung der periodischen Veränderungen.

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschlag des Verlags 120% (Abänderung vorbehalten)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preise freibleibend

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

S0-GBG-968